

La résolution du modèle d'Ising à deux dimensions selon la méthode de Baxter

A. Henriques

à la suite d'un cours donné à Lausanne par V. Jones le semestre d'hiver 1998

1 Introduction

En mécanique statistique, on dit qu'on *résout* un système, quand on calcule la valeur d'un invariant qui s'appelle l'*énergie libre*. A part ceux "à une dimension", les systèmes pour lesquels on sait le faire explicitement sont rares (de nos jours en tout cas). On a trouvé qu'il valait la peine de présenter dans cet article la méthode originale que Baxter (voir [Bax]) a utilisé pour résoudre le modèle d'Ising à deux dimensions.

Nous tenons à nous excuser envers d'éventuels lecteurs physiciens car certaines notions, tout à fait centrales en mécanique statistique, sont passées sous silence. C'est le cas par exemple de l'*énergie* associée à un état. En effet, notre but n'étant pas de donner un sens physique aux divers calculs, nous avons uniquement introduit les concepts utiles pour la suite.

Les paragraphes 2 à 4 ne font qu'introduire les différentes notions et quelques résultats généraux qui seront utiles pour la suite. De ce fait, nous conseillons la lecture en parallèle du paragraphe 5, où l'on introduit le *modèle d'Ising* sur lequel s'applique la théorie.

2 Graphes à bord

Definition 2.1 *Un graphe à bord Γ est un quadruplet $(\dot{\Gamma}, \bar{\Gamma}, \partial\Gamma, i_\Gamma)$ avec $i_\Gamma : \bar{\Gamma} \rightarrow \dot{\Gamma} \times \dot{\Gamma}$ et $\partial\Gamma \subset \bar{\Gamma}$. On appelle $\dot{\Gamma}$ l'ensemble des sommets de Γ , $\bar{\Gamma}$ l'ensemble des arêtes et $\partial\Gamma$ le bord du graphe. La fonction i_Γ associe à une arête les deux sommets qui en sont les extrémités.*

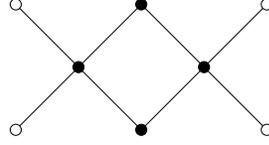
Introduisons également quelques notations pour la suite. L'*intérieur* de Γ :

$$\text{Int}(\Gamma) : = \dot{\Gamma} \setminus \partial\Gamma \quad (1)$$

et l'*étoile* d'un sommet $\gamma \in \dot{\Gamma}$ notée

$$\text{St}(\gamma) : = \{r \in \bar{\Gamma} \mid \exists \gamma' \in \dot{\Gamma} \text{ t.q. } i_\Gamma(r) = (\gamma, \gamma') \text{ ou } (\gamma', \gamma)\}. \quad (2)$$

Pour dessiner un graphe à bord, on utilisera la convention suivante. Les sommets de l'intérieur seront représentés par des ronds pleins, alors que ceux du bord le seront par des ronds vides. On omettra de signaler sur le dessin l'orientation des arêtes.



Un graphe à bord

Definition 2.2 Un sous-graphe Γ' de Γ est un graphe à bord tel que $\dot{\Gamma}' \subset \dot{\Gamma}$, $\text{Int}(\Gamma') \subset \text{Int}(\Gamma)$ et tel que on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Gamma}' & \hookrightarrow & \bar{\Gamma} \\ \downarrow i_{\Gamma'} & & \downarrow i_{\Gamma} \\ \dot{\Gamma}' \times \dot{\Gamma}' & \hookrightarrow & \dot{\Gamma} \times \dot{\Gamma} \end{array}$$

qui commute. On demande encore que

$$\forall \gamma \in \text{Int}(\Gamma') \quad St(\gamma) \subset \bar{\Gamma}'. \quad (3)$$

Si en plus on a $\partial\Gamma' \subset \text{Int}(\Gamma)$, alors on dira que Γ' est un sous-graphe propre de Γ . On admettra que deux graphes $\Gamma' \hookrightarrow \Gamma$ s'injectent l'un dans l'autre chaque fois que Γ' est envoyé de façon isomorphe sur un sous graphe de Γ .

Remarque. Les inclusions définies ci-dessus sont les seuls morphismes de graphes à bord que nous considérerons.

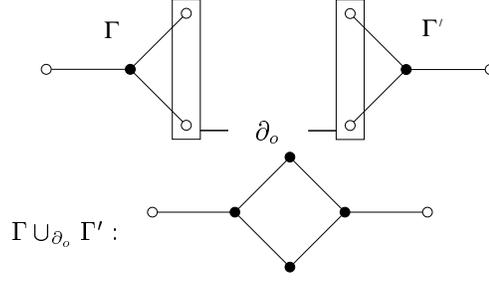
Definition 2.3 Si on se donne deux graphes Γ, Γ' et un ensemble ∂_o qui s'injecte à la fois $j : \partial_o \hookrightarrow \partial\Gamma$ et $j' : \partial_o \hookrightarrow \partial\Gamma'$, alors on définit un graphe $\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma'$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ j \nearrow & & \searrow \\ \partial_o & & \Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma' \\ j' \searrow & & \nearrow \\ & \Gamma' & \end{array} ,$$

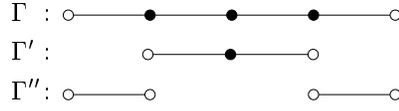
par les formules

$$\begin{aligned} \overbrace{\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma'} &: = \dot{\Gamma} \cup_{\partial_o} \dot{\Gamma}' \\ \overline{\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma'} &: = \bar{\Gamma} \sqcup \bar{\Gamma}' \\ \partial(\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma') &: = |\partial\Gamma \setminus j(\partial_o)| \sqcup |\partial\Gamma' \setminus j'(\partial_o)| \\ i_{\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma'}(r) &: = \begin{cases} i_{\Gamma}(r) & \text{si } r \in \bar{\Gamma} \\ i_{\Gamma'}(r) & \text{si } r \in \bar{\Gamma}' \end{cases} . \end{aligned}$$

Intuitivement, on recolle les deux graphes Γ et Γ' le long de ∂_o et on élimine la partie qui a été recollée du bord.



Lemme 2.4 *Soit Γ un graphe à bord et $\Gamma' \subset \Gamma$ un sous-graphe propre. Alors il existe un graphe Γ'' tel que $\Gamma \simeq \Gamma' \cup_{\partial\Gamma'} \Gamma''$.*



Démonstration. Il suffit de poser

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}'' &:= \dot{\Gamma} \setminus \text{Int}(\Gamma'), & \bar{\Gamma}'' &:= \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}', \\ \partial\Gamma'' &:= \partial\Gamma \sqcup \partial\Gamma', & i_{\Gamma''} &:= i_{\Gamma}|_{\bar{\Gamma}''} \end{aligned}$$

et on a toutes les conditions qui sont satisfaites pour avoir $\tilde{\Gamma} := \Gamma' \cup_{\partial\Gamma'} \Gamma'' \simeq \Gamma$. Tout d'abord, le fait que Γ' soit sous graphe propre de Γ nous garantit que $\partial\Gamma$ et $\partial\Gamma'$ sont disjoints et on a bien $\partial\tilde{\Gamma} = (\partial\Gamma' \setminus \partial\Gamma') \sqcup (\partial\Gamma'' \setminus \partial\Gamma') = \partial\Gamma'' \setminus \partial\Gamma' = \partial\Gamma$. De même, on vérifie facilement que les ensembles des sommets et des arêtes de Γ et de $\tilde{\Gamma}$ sont en bijection.

Remarquons encore que $i_{\Gamma''}$ atterrit bien, de par (3), dans $\dot{\Gamma}'' \times \dot{\Gamma}''$. En effet, supposons que $r \in \bar{\Gamma}'' = \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}'$ soit tel que $i_{\Gamma}(r) = (\gamma, \gamma')$ avec $\gamma \notin \dot{\Gamma}''$, on aurait donc $\gamma \in \text{Int}(\Gamma')$. Maintenant, (3) nous dit que $St(\gamma) \subset \bar{\Gamma}'$, or $r \in St(\gamma) \subset \bar{\Gamma}'$ contredit $r \in \bar{\Gamma}''$. \square

Remarque. Il est possible d'énoncer un lemme analogue pour des sous graphes qui ne sont pas nécessairement propres. Ceci nécessite toutefois de modifier la définition de l'union de deux graphes et ça allourdit les notations.

3 Systèmes de mécanique statistique sur des graphes à bord

Munissons nos graphes d'un peu de structure supplémentaire.

Definition 3.1 *Un système (ou système de mécanique statistique) est un triplet (Γ, Q, R) où Γ est un graphe à bord, Q est un ensemble fini et R est une fonction*

$$R : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathcal{M}_{Q \times Q}(\mathbb{C}) \quad (4)$$

qui associe à chaque arête du graphe une matrice $Q \times Q$ qui s'appelle la matrice des poids de Boltzmann.

Par abus de notation, nous utiliserons tout aussi bien la lettre Γ pour désigner un système que pour désigner le graphe sous-jacent. Les notations précédemment introduites pour les graphes se généralisent aux systèmes. On dira que deux systèmes $\Gamma \xrightarrow{j} \Gamma'$ s'injectent l'un dans l'autre s'ils s'injectent en tant que graphes et si de plus $Q = Q'$ et $R'(r) = R(j(r)) \forall r \in \bar{\Gamma}'$. De même, si Γ et Γ' sont deux systèmes tels que $Q = Q'$, alors $\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma'$ désigne l'unique système sur le graphe $\Gamma \cup_{\partial_o} \Gamma'$ tel que Γ et Γ' s'injectent en tant que systèmes.

Introduisons encore la notation $\mathcal{E}(\Gamma)$ pour désigner l'ensemble des états d'un système Γ

$$\mathcal{E}(\Gamma) := \{\sigma : \dot{\Gamma} \rightarrow Q\}. \quad (5)$$

L'un des invariants les plus utiles que l'on peut associer à un système est le suivant (Ici, pour désigner un élément d'une matrice, on note l'indice des lignes en haut et l'indice des colonnes en bas. Le lecteur prendra soin de ne pas confondre de tels indices avec d'éventuels exposants).

Definition 3.2 Soit Γ un système fini (i.e. tel que les ensembles $\dot{\Gamma}$ et $\bar{\Gamma}$ soient finis). Sa fonction de partition $Z(\Gamma)$ est une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathcal{E}(\partial\Gamma)$:

$$Z(\Gamma)_{\sigma_o} := \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(\Gamma) \\ \sigma|_{\partial\Gamma} = \sigma_o}} \prod_{\substack{r \in \bar{\Gamma} \\ i_{\Gamma}(r) = (\gamma, \gamma')}} R(r)_{\sigma(\gamma')}^{\sigma(\gamma)}. \quad (6)$$

Si Γ est un graphe dont le bord est composé de deux parties $\partial\Gamma = \partial_1 \sqcup \partial_2$, alors on observe que $\mathcal{E}(\partial\Gamma) \simeq \mathcal{E}(\partial_1) \times \mathcal{E}(\partial_2)$. Du coup, un élément $\sigma \in \mathcal{E}(\partial\Gamma)$ se décompose en deux "composantes" $\sigma_1 \in \mathcal{E}(\partial_1)$ et $\sigma_2 \in \mathcal{E}(\partial_2)$. Dans une pareille situation, on notera $Z(\Gamma)_{\sigma_2}^{\sigma_1}$ pour désigner $Z(\Gamma)_{\sigma}$. Du coup, $Z(\Gamma)$ peut être considérée comme une matrice à $|\mathcal{E}(\partial_1)|$ lignes et à $|\mathcal{E}(\partial_2)|$ colonnes.

Avec cette notation, la fonction de partition de l'union $\Gamma \cup \Gamma'$ de deux graphes se calcule facilement à partir de chacune des fonctions de partitions de Γ et de Γ' .

Proposition 3.3 Soient Γ et Γ' deux systèmes tels que $\partial\Gamma = \partial_o \sqcup \partial_1$ et $\partial\Gamma' = \partial_1 \sqcup \partial_2$. Alors on a

$$Z(\Gamma \cup_{\partial_1} \Gamma')_{\sigma_2}^{\sigma_o} = \sum_{\sigma_1 \in \mathcal{E}(\partial_1)} Z(\Gamma)_{\sigma_1}^{\sigma_o} \cdot Z(\Gamma')_{\sigma_2}^{\sigma_1} \quad (7)$$

Démonstration. Il suffit de développer

$$\begin{aligned} Z(\Gamma \cup \Gamma')_{\sigma_2}^{\sigma_o} &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(\Gamma \cup \Gamma') \\ \sigma|_{\partial_o} = \sigma_o \\ \sigma|_{\partial_2} = \sigma_2}} \prod_{\substack{r \in \overline{\Gamma \cup \Gamma'} \\ i(r) = (\gamma, \gamma')}} R(r)_{\sigma(\gamma')}^{\sigma(\gamma)} \\ &= \sum_{\sigma_1 \in \mathcal{E}(\partial_1)} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(\Gamma \cup \Gamma') \\ \sigma|_{\partial\Gamma} = (\sigma_o, \sigma_1) \\ \sigma|_{\partial\Gamma'} = (\sigma_1, \sigma_2)}} \left[\prod_{\substack{r \in \bar{\Gamma} \\ i(r) = (\gamma, \gamma')}} R(r)_{\sigma(\gamma')}^{\sigma(\gamma)} \right] \cdot \left[\prod_{\substack{r \in \bar{\Gamma}' \\ i(r) = (\gamma, \gamma')}} R(r)_{\sigma(\gamma')}^{\sigma(\gamma)} \right] \\ &= \sum_{\sigma_1 \in \mathcal{E}(\partial_1)} \left[\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(\Gamma) \\ \sigma|_{\partial\Gamma} = (\sigma_o, \sigma_1)}} \prod_{\substack{r \in \bar{\Gamma} \\ i(r) = (\gamma, \gamma')}} R(r)_{\sigma(\gamma')}^{\sigma(\gamma)} \right] \cdot \left[\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(\Gamma') \\ \sigma|_{\partial\Gamma'} = (\sigma_1, \sigma_2)}} \prod_{\substack{r \in \bar{\Gamma}' \\ i(r) = (\gamma, \gamma')}} R(r)_{\sigma(\gamma')}^{\sigma(\gamma)} \right] \end{aligned}$$

et on obtient la formule désirée. \square

Si on considère les fonctions de partitions ci dessus comme des matrices, il est alors élégant de réécrire (7) de la façon abrégée

$$Z(\Gamma \cup_{\partial_1} \Gamma') = Z(\Gamma)Z(\Gamma'). \quad (8)$$

Lemme 3.4 *Soient T_1 et T_2 deux systèmes avec $\partial T_1 = \partial T_2$ tels que $Z(T_1) = Z(T_2)$. Si Γ_1 et Γ_2 sont des systèmes avec $T_1 \subset \Gamma_1$ et $T_2 \subset \Gamma_2$, et qui sont identiques en dehors de T_1 et T_2 , alors on a $Z(\Gamma_1) = Z(\Gamma_2)$.*

Par exemple, si

$$Z \left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \right) = Z \left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \right),$$

on peut en déduire que

$$Z \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \text{---} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) = Z \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right).$$

Démonstration. Si $T_1 \subset \Gamma_1$ et $T_2 \subset \Gamma_2$ sont des sous systèmes propres, alors on peut trouver, de par le lemme 2.4, un système Γ'' tel que $\Gamma_1 = T_1 \cup_{\partial T_1} \Gamma''$ et $\Gamma_2 = T_2 \cup_{\partial T_2} \Gamma''$. La proposition 3.3 nous dit maintenant que

$$Z(\Gamma_1) = Z(T_1)Z(\Gamma'') \quad \text{et} \quad Z(\Gamma_2) = Z(T_2)Z(\Gamma''),$$

où $Z(\Gamma_i)$ et $Z(T_i)$ sont vus comme des vecteurs ligne. On en déduit $Z(\Gamma_1) = Z(\Gamma_2)$.

Si maintenant $T_1 \subset \Gamma_1$ et $T_2 \subset \Gamma_2$ ne sont pas des sous-systèmes propres, alors il convient de modifier Γ_1 et Γ_2 , sans changer leur fonction de partition, de telle manière à ce que T_1 et T_2 deviennent propres. Posons $\partial\Gamma := \partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$ et soit $\tilde{\Gamma}$ le système composé de $|\partial\Gamma|$ arêtes, toutes disjointes, dont tous les sommets sont sur le bord et dont toutes les matrices des poids de Boltzmann sont $Id_{Q \times Q}$. On a donc $\partial\tilde{\Gamma} = \partial\Gamma \sqcup \partial\Gamma$, et il est facile de vérifier que $Z(\tilde{\Gamma}) = Id_{\mathcal{E}(\partial\Gamma) \times \mathcal{E}(\partial\Gamma)}$. Ceci nous donne

$$\begin{aligned} Z(\Gamma_1) &= Z(\Gamma_1 \cup_{\partial\Gamma} \tilde{\Gamma}), \\ Z(\Gamma_2) &= Z(\Gamma_2 \cup_{\partial\Gamma} \tilde{\Gamma}) \end{aligned}$$

et on est ramené au cas précédent. \square

Quand on a à faire à des graphes infinis, la fonction de partition n'est plus définie. Par contre une notion la remplace.

Definition 3.5 Soit Γ un système (généralement infini) tel que $\partial\Gamma = \emptyset$ et tel que pour tout $\gamma \in \bar{\Gamma}$, $St(\gamma)$ est fini. On dit que son énergie libre $F(\Gamma)$ est bien définie si tous les poids de Boltzmann (i.e. les composantes des matrices $R(r)$, $r \in \bar{\Gamma}$) sont réels positifs et si, pour toute suite $\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \dots$ de sous-systèmes finis telle que $\bar{\Gamma} = \bigcup \text{Int}(\Gamma_n)$, satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\text{Int}(\Gamma_n)|}{|\bar{\Gamma}_n|} = 1 \quad (9)$$

et pour tout choix de $\sigma_n \in \mathcal{E}(\partial\Gamma_n)$, la suite

$$\frac{1}{|\bar{\Gamma}_n|} \ln |Z(\Gamma_n)_{\sigma_n}| \quad (10)$$

possède une limite. Il est facile de voir que, si cette limite existe toujours, elle sera la même pour les différents choix de Γ_n . On la notera $F(\Gamma)$.

Il est intéressant de définir une notion relativement faible de “convergence” pour des systèmes.

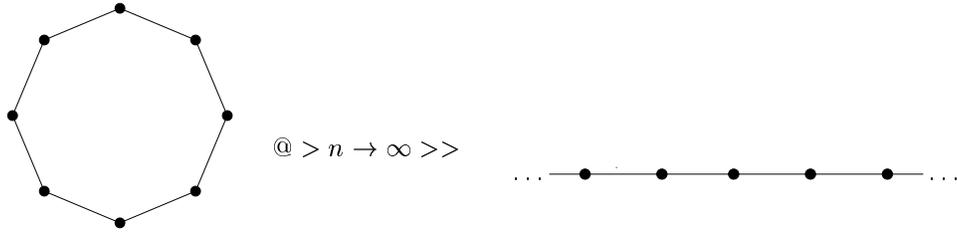
Definition 3.6 On dira pour une suite de systèmes finis (Γ_n) , $n \in \mathbb{N}$ qu'elle tend vers un système Γ si il existe une suite (Γ'_n) , avec $\Gamma'_n \subset \Gamma_n$ des sous-systèmes propres de Γ_n , telle que $\Gamma'_1 \hookrightarrow \Gamma'_2 \hookrightarrow \dots$ et de façon à ce que $\bar{\Gamma} = \bigcup \text{Int}(\Gamma'_n)$. On demande en plus que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\text{Int}(\Gamma'_n)|}{|\bar{\Gamma}_n|} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bar{\Gamma}_n \setminus \bar{\Gamma}'_n|}{|\bar{\Gamma}_n|} = 0 \quad (11)$$

et qu'il existe une constante $c \geq 1$ telle que

$$\forall n, \forall r \in \bar{\Gamma}_n \setminus \bar{\Gamma}'_n, \forall p, q \in Q \quad c^{-1} \leq R(r)_q^p \leq c.$$

Avec cette définition, on peut dire par exemple que des systèmes en forme de cercle tendent vers un système en forme de droite.



Remarque. Le fait qu'une suite (Γ_n) tende simultanément vers Γ et vers Γ' n'implique pas forcément $\Gamma \simeq \Gamma'$!

Proposition 3.7 Soit Γ un système pour lequel $F(\Gamma)$ est bien défini et soit (Γ_n) une suite de systèmes finis qui tendent vers Γ au sens de la définition 3.6. Alors pour tout choix de $\sigma_n \in \mathcal{E}(\partial\Gamma_n)$ on a

$$F(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln |Z(\Gamma_n)_{\sigma_n}|. \quad (12)$$

Démonstration. De par le lemme 2.4 on peut écrire $\Gamma_n = \Gamma'_n \cup_{\partial\Gamma'_n} \Gamma''_n$ avec $|\dot{\Gamma}''_n| = o(|\dot{\Gamma}_n|)$ et $|\bar{\Gamma}''_n| = o(|\dot{\Gamma}_n|)$. La proposition 3.3 nous dit maintenant qu'on peut écrire

$$Z(\Gamma_n)_\sigma = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)} Z(\Gamma'_n)_{\sigma'} Z(\Gamma''_n)_{\sigma'}. \quad (13)$$

On obtient donc les inégalités

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)| \min_{\sigma' \in \mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)} Z(\Gamma'_n)_{\sigma'} \min_{\sigma' \in \mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)} Z(\Gamma''_n)_{\sigma'} &\leq \\ &\leq Z(\Gamma_n)_\sigma \leq \\ &\leq |\mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)| \max_{\sigma' \in \mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)} Z(\Gamma'_n)_{\sigma'} \max_{\sigma' \in \mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)} Z(\Gamma''_n)_{\sigma'}. \end{aligned} \quad (14)$$

Considérons uniquement la majoration de $Z(\Gamma_n)_\sigma$ (les calculs pour la minoration étant exactement les mêmes). On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln |Z(\Gamma_n)_\sigma| &\leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \left[\ln |\mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)| + \ln | \max_{\sigma'} Z(\Gamma'_n)_{\sigma'} \right. \\ &\quad \left. + \ln | \max_{\sigma'} Z(\Gamma''_n)_{\sigma'} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Prenons chacun des trois termes séparément. Premièrement on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln |\mathcal{E}(\partial\Gamma'_n)| = \ln(Q) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial\Gamma'_n|}{|\dot{\Gamma}_n|} = 0. \quad (16)$$

D'un autre côté, vu que $F(\Gamma)$ est bien définie et que

$$1 \geq \frac{|\text{Int}(\Gamma'_n)|}{|\dot{\Gamma}_n|} \geq \frac{|\text{Int}(\Gamma'_n)|}{|\dot{\Gamma}_n|} @ > n \rightarrow \infty \gg 1, \quad (17)$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln | \max_{\sigma'} Z(\Gamma'_n)_{\sigma'} | = F(\Gamma). \quad (18)$$

Reste à traiter le troisième terme.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln | \max_{\sigma'} Z(\Gamma''_n)_{\sigma'} | &= \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln \left(\max_{\sigma'} \sum_{\substack{\sigma'' \in \mathcal{E}(\Gamma''_n) \\ \sigma'' |_{\partial\Gamma''_n} = (\sigma', \sigma)}} \prod_{r \in \bar{\Gamma}''_n} R(r)_{\sigma''(\gamma')}^{\sigma''(\gamma)} \right) \\ &\leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln \left(|\mathcal{E}(\Gamma''_n)| \cdot | \max_{r \in \bar{\Gamma}''_n} \max_{p, q \in Q} R(r)_q^p |^{|\bar{\Gamma}''_n|} \right) \\ &\leq \ln(Q) \frac{|\dot{\Gamma}''_n|}{|\dot{\Gamma}_n|} + \ln(c) \frac{|\bar{\Gamma}''_n|}{|\dot{\Gamma}_n|} @ > n \rightarrow \infty \gg 0. \end{aligned}$$

Quitte à développer des calculs analogues pour minorer, on peut voir que

$\frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln(Z(\Gamma_n)_\sigma)$ est encadré par deux termes qui tendent chacun vers $F(\Gamma)$, ce qui achève la preuve. \square

On peut généraliser la proposition précédente et considérer une suite de systèmes (Γ_n) “tendant” vers un certain Γ , mais où chacun des Γ_n est infini.

Proposition 3.8 *Soit Γ un système pour lequel $F(\Gamma)$ est bien définie, et soit (Γ_n) une suite de systèmes qui ont aussi $F(\Gamma_n)$ bien définies. Soient $\Gamma_{n,k} \subset \Gamma_n$ des sous-systèmes finis des Γ_n tels que $\Gamma_{n,1} \hookrightarrow \Gamma_{n,2} \hookrightarrow \dots$ et $\dot{\Gamma}_n = \bigcup_k \text{Int}(\Gamma_{n,k})$ et satisfaisant*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\text{Int}(\Gamma_{n,k})|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} = 1. \quad (19)$$

Soient enfin $\Gamma'_{n,k}$ des sous-systèmes propres des $\Gamma_{n,k}$ tels que on a des inclusions

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \\ \Gamma'_{2,1} & \longrightarrow & \Gamma'_{2,2} & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \Gamma'_{1,1} & \longrightarrow & \Gamma'_{1,2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

et que $\dot{\Gamma} = \bigcup_{n,k} \text{Int}(\Gamma'_{n,k})$. Si en plus il existe des $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ et $c \geq 1$ tels que

$$\frac{|\text{Int}(\Gamma'_{n,k})|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \geq 1 - a_n, \quad \frac{|\bar{\Gamma}_{n,k} \setminus \bar{\Gamma}'_{n,k}|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \leq a_n \quad (20)$$

et

$$\forall n, k \quad \forall r \in \bar{\Gamma}_{n,k} \setminus \bar{\Gamma}'_{n,k}, \quad \forall p, q \in Q \quad c^{-1} \leq R(r)_q^p \leq c. \quad (21)$$

Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\Gamma_n) = F(\Gamma). \quad (22)$$

Démonstration. Comme pour la proposition précédente, on écrit $\Gamma_{n,k} = \Gamma'_{n,k} \cup_{\partial \Gamma'_{n,k}} \Gamma''_{n,k}$. On en déduit

$$Z(\Gamma_{n,k}) = Z(\Gamma'_{n,k})Z(\Gamma''_{n,k}) \quad (23)$$

et on obtient les inégalités

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \left(\ln |\mathcal{E}(\partial \Gamma'_{n,k})| + \ln \lvert \min_{\sigma'} Z(\Gamma'_{n,k})_{\sigma'} \rvert + \ln \lvert \min_{\sigma'} Z(\Gamma''_{n,k})_{\sigma'} \rvert \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln \lvert Z(\Gamma_{n,k})_\sigma \rvert \leq \\ & \leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \left(\ln |\mathcal{E}(\partial \Gamma'_{n,k})| + \ln \lvert \max_{\sigma'} Z(\Gamma'_{n,k})_{\sigma'} \rvert + \ln \lvert \max_{\sigma'} Z(\Gamma''_{n,k})_{\sigma'} \rvert \right). \end{aligned} \quad (24)$$

De nouveau, certains termes peuvent être bornés

$$0 \leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln |\mathcal{E}(\partial \Gamma'_{n,k})| \leq \ln(Q) \cdot a_n, \quad (25)$$

$$\frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln \lvert \min_{\sigma'} Z(\Gamma''_{n,k})_{\sigma'} \rvert \geq \ln(Q) \frac{|\dot{\Gamma}_{n,k}|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} - \ln(c) \frac{|\bar{\Gamma}_{n,k}|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \geq -\ln(c) \cdot a_n \quad (26)$$

et

$$\frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln \max_{\sigma'} Z(\Gamma''_{n,k})_{\sigma'} \leq \ln(Q) \frac{|\dot{\Gamma}''_{n,k}|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} + \ln(c) \frac{|\bar{\Gamma}''_{n,k}|}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \leq (\ln(Q) + \ln(c)) \cdot a_n \quad (27)$$

Si on introduit $B_1 := -\ln(c)$ et $B_2 := 2\ln(Q) + \ln(c)$, alors on peut réécrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln Z(\Gamma'_{n,k})_{\sigma_{\min}} + B_1 a_n &\leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln Z(\Gamma_{n,k})_{\sigma} \leq \\ &\leq \frac{1}{|\dot{\Gamma}_{n,k}|} \ln Z(\Gamma'_{n,k})_{\sigma_{\max}} + B_2 a_n. \end{aligned} \quad (28)$$

Maintenant, on sait que les termes extérieurs tendent vers $F(\Gamma)$ pour $n, k \rightarrow \infty$. Il en est donc de même pour le terme du milieu. Or, le terme du milieu tend vers $F(\Gamma_n)$ pour $k \rightarrow \infty$. On en déduit que

$$F(\Gamma_n) \rightarrow F(\Gamma) \quad \text{pour} \quad n \rightarrow \infty.$$

□

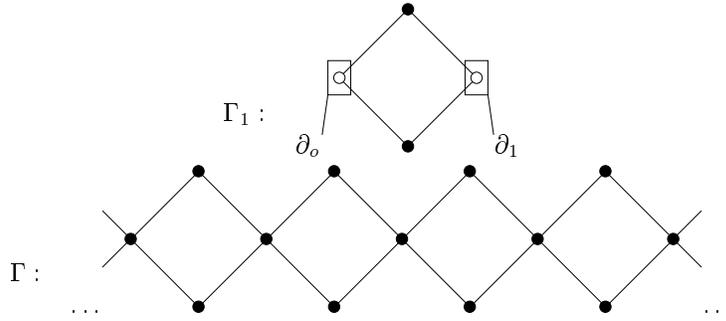
Pour une suite de systèmes (Γ_n) , satisfaisant aux conditions de la proposition 3.8, on dira aussi que Γ_n tend vers Γ .

4 L'énergie libre de systèmes à une dimension

Soit Γ_1 un système fini tel que $\partial\Gamma_1 = \partial_o \sqcup \partial_1$, avec $\partial_o \simeq \partial_1$. Nommons Γ^i , $i \in \mathbb{Z}$, un système isomorphe à Γ_1 qui aurait $\partial\Gamma^i = \partial_i \sqcup \partial_{i+1}$, avec $\partial_i \simeq \partial_{i+1} \simeq \partial_o$. On peut alors considérer la suite $\Gamma^o = \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2 \leftrightarrow \dots$, définie inductivement par

$$\Gamma_n := \begin{cases} \Gamma_{n-1} \cup_{\partial_{n/2}} \Gamma^{n/2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \Gamma^{(-n+1)/2} \cup_{\partial_{(-n+3)/2}} \Gamma_{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (29)$$

Le système Γ , vers lequel tendent les Γ_n s'appelle un *système à une dimension*.



En appliquant la proposition 3.3 et en se rappelant que tous les Γ^i sont isomorphes, on obtient la formule élégante

$$Z(\Gamma_n) = Z(\Gamma_1)^n \quad (30)$$

qui est une égalité de matrices $\mathcal{E}(\partial_o) \times \mathcal{E}(\partial_o)$.

Definition 4.1 Soit Γ un système à une dimension obtenu par le procédé ci-dessus. on appelle Γ_1 le segment de base et $T := Z(\Gamma_1) \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}(\partial_o) \times \mathcal{E}(\partial_o)}(\mathbb{C})$ la matrice de transfert associées.

Proposition 4.2 Soit Γ un graphe à une dimension et soit $T = Z(\Gamma_1)$ la matrice de transfert associée. Alors, si $F(\Gamma)$ est bien définie, on a la formule

$$F(\Gamma) = \frac{1}{|\dot{\Gamma}_1 \setminus \partial_1|} \ln(\lambda_{\max}) \quad (31)$$

où λ_{\max} est la plus grande des valeurs propres de T .

Démonstration. Vu que $F(\Gamma)$ est bien définie, tous les poids de Boltzmann sont réels positifs. Il en est donc de même pour tous les coefficients de la matrice de transfert T . On peut alors appliquer le théorème de Perron-Frobenius qui nous dit qu'il existe une unique valeur propre λ_{\max} , simple, de module maximal et que celle-ci est réelle positive (pour plus de précisions, le lecteur peut consulter [Gan]). De plus, on sait que le vecteur propre correspondant a ses coordonnées toutes positives. Soit P le projecteur spectral associé à λ_{\max} , qui a, lui aussi, toutes ses composantes positives. Si on décompose T en

$$T = \lambda_{\max} P + T' \quad (32)$$

on aura que le spectre de T' est entièrement contenu dans la boule de rayon λ_{\max} . Soient maintenant Γ_n tendant vers Γ , définis comme précédemment. On a donc

$$F(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln |Z(\Gamma_n)_{\sigma_n}^{\sigma_n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\dot{\Gamma}_n|} \ln |(T^{2n+1})_{\sigma_n}^{\sigma_n}|. \quad (33)$$

Il est facile de voir que $|\dot{\Gamma}_n| = (n+1)|\dot{\Gamma}_1| - n|\partial_1|$, on peut donc réécrire

$$F(\Gamma) = \frac{1}{|\dot{\Gamma}_1 \setminus \partial_1|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(T^n)_{\sigma_n}^{\sigma_n}|. \quad (34)$$

Maintenant, on peut substituer $T^n = \lambda_{\max}^n P + T'^n$ et on obtient

$$\begin{aligned} |\dot{\Gamma}_1 \setminus \partial_1| \cdot F(\Gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_{\max}^n P_{\sigma_n}^{\sigma_n} + (T'^n)_{\sigma_n}^{\sigma_n}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\ln(\lambda_{\max}^n) + \ln \left(P_{\sigma_n}^{\sigma_n} + \left(\left(\frac{T'}{\lambda_{\max}} \right)^n \right)_{\sigma_n}^{\sigma_n} \right) \right) \\ &= \ln(\lambda_{\max}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(P_{\sigma_n}^{\sigma_n} + \left(\left(\frac{T'}{\lambda_{\max}} \right)^n \right)_{\sigma_n}^{\sigma_n} \right). \end{aligned}$$

Or, vu que le spectre de $\frac{T'}{\lambda_{\max}}$ est contenu dans la boule unité, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{T'}{\lambda_{\max}} \right)^n = 0. \quad (35)$$

maintenant, on observe que $P_{\sigma_n}^{\sigma_n}$ est borné. On en déduit

$$|\dot{\Gamma}_1 \setminus \partial_1| \cdot F(\Gamma) = \ln(\lambda_{\max}). \quad (36)$$

□

2. Quand des valeurs $\sigma(\gamma)$ sont indiquées sur les sommets du bord, la fonction de partition est évaluée en $\sigma \in \mathcal{E}(\partial\Gamma)$. L'écriture

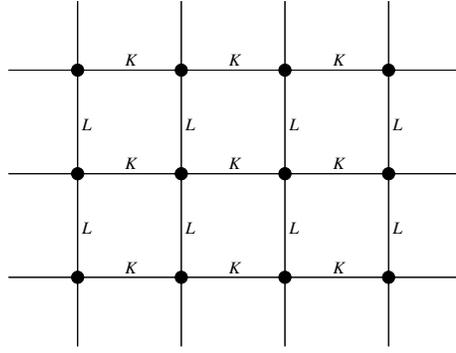
$$\sigma \circ \text{---} \overset{K}{\text{---}} \text{---} \circ \sigma'$$

désigne donc un scalaire qui prend la valeur e^K si $\sigma = \sigma'$ et e^{-K} si $\sigma \neq \sigma'$. Vu que $\sigma, \sigma' \in Q = \{+1, -1\}$, on peut écrire

$$\sigma \circ \text{---} \overset{K}{\text{---}} \text{---} \circ \sigma' = e^{K\sigma\sigma'}.$$

Il est temps maintenant d'introduire le système dont le but de cet article est de calculer la fonction de partition.

Definition 5.1 *Le modèle d'Ising à deux dimensions sur une grille carrée est le système infini*

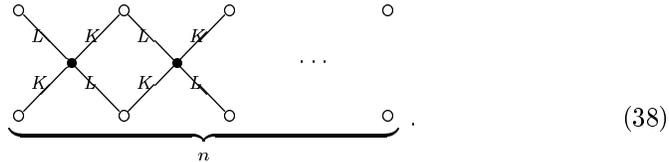


Le modèle d'Ising

dépendant de deux paramètres réels K et L . Le graphe sous-jacent est le graphe des arêtes et sommets d'un pavage carré du plan. Les poids de Boltzmann prennent une valeur pour les arêtes verticales et une autre pour les arêtes horizontales. On le notera $Ising(K, L)$.

Pour calculer $F(Ising(K, L))$, la stratégie est la suivante. D'abord on définira une suite $(\Gamma(K, L; n))$ de systèmes à une dimension qui tend vers $Ising(K, L)$ au sens de la proposition 3.8 et ensuite on va essayer de déterminer explicitement la valeur propre maximale $\lambda_{\max}(K, L; n)$ de la matrice de transfert associée à $\Gamma(K, L; n)$. On devra bien sûr se contenter d'un résultat du type "si l'énergie libre de $Ising(K, L)$ est bien définie, alors sa valeur sera...".

Soit $\Gamma(K, L; n)$ le système à une dimension dont le segment de base est



(38)

Le motif est répété n fois et l'on identifie les deux sommets de droite avec les deux de gauche de telle manière que le système $\Gamma(K, L; n)$ ressemble à un cylindre pavé par des carrés mis en diagonale. Il est facile de se convaincre que

les $\Gamma(K, L; n)$ tendent vers $Ising(K, L)$ au sens de la proposition 3.8. On peut donc appliquer les propositions 3.8 et 4.2 pour obtenir la formule

$$F \upharpoonright Ising(K, L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \upharpoonright \lambda_{\max}(K, L; n). \quad (39)$$

Ceci, à condition toutefois de bien vouloir croire que $F(Ising(K, L))$ et $F(\Gamma(K, L; n))$ soient bien définies.

Dorénavant, n sera fixé et, pour alléger les notations, il sera sous-entendu. Chaque fois qu'un système a un bord composé de deux rangées de n points, sa fonction de partition devra être considérée comme une matrice $2^n \times 2^n$, les états du bord supérieur indexant les lignes et les états du bord inférieur les colonnes. Il conviendra également d'identifier chaque fois les extrémités droite et gauche. Dans ce contexte, la multiplication de deux matrices signifie superposer les systèmes, la première des deux matrices correspondant au système du haut.

Posons

$$V(K, L) := \dots \begin{array}{c} \circ \\ | \text{K} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \text{L} \\ \circ \\ | \text{K} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \text{L} \\ \circ \\ | \text{K} \\ \circ \end{array} \dots \quad (40)$$

et

$$W(K, L) := \dots \begin{array}{c} \circ \\ | \text{L} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagup \text{K} \\ \circ \\ | \text{L} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagup \text{K} \\ \circ \\ | \text{L} \\ \circ \end{array} \dots \quad (41)$$

Selon nos conventions, $V(K, L)$ et $W(K, L)$ sont des matrices $2^n \times 2^n$. Si on nomme $T(K, L)$ la matrice de transfert associée à $\Gamma(K, L)$ (qui est donc la fonction de partition du système (38)), alors on voit tout de suite que $V(K, L)W(K, L) = W(K, L)V(K, L) = T(K, L)$. Il convient maintenant et pour la suite de relâcher un peu les contraintes qu'on avait imposées, et d'accepter $K, L \in \mathbb{C}$. Introduisons encore deux matrices.

$$C := \dots \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \circ \\ \circ \end{array} \dots \quad (42)$$

$$R := \dots \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \circ \end{array} \dots \quad (43)$$

Les deux systèmes ci-dessus n'étant pas du type modèle d'Ising, on a écrit explicitement les matrices des poids de Boltzmann.

Proposition 5.2 *Les matrices $V(K, L)$, $W(K, L)$, C et R satisfont les formules suivantes.*

1. $V(K, L)^* = W(\bar{L}, \bar{K})$
2. $C^* = C^{-1}$, $C^n = Id$

3. $R^* = R = R^{-1}$
4. $V(K, L)C = CV(K, L) = W(K, L)$
5. $V(K, L)R = RV(K, L) = V(-K, -L)$
6. $CR = RC$
7. $V(K + i\pi, L) = V(K, L + i\pi) = (-1)^n V(K, L)$
8. $V(K + \frac{i\pi}{2}, L - \frac{i\pi}{2}) = V(K, L)$

Démonstration. Il convient de remarquer que les matrices C et R sont des matrices de permutation. Si $\sigma \in \mathcal{E}(\{1, \dots, n\})$ est identifié à un vecteur de base de \mathbb{C}^{2^n} , alors $C(\sigma)$ et $R(\sigma)$ sont les vecteurs de base satisfaisant $C(\sigma)_j = \sigma_{j-1}$ et $R(\sigma)_j = -\sigma_j$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C})$ on a donc

$$\begin{aligned} (MC)_{\sigma'}^{\sigma} &= M_{C(\sigma')}^{\sigma}, & (CM)_{\sigma'}^{\sigma} &= M_{\sigma'}^{C^{-1}(\sigma)} \\ (MR)_{\sigma'}^{\sigma} &= M_{R(\sigma')}^{\sigma}, & (RM)_{\sigma'}^{\sigma} &= M_{\sigma'}^{R^{-1}(\sigma)} = M_{\sigma'}^{R(\sigma)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Une fois ces remarques faites, il devient trivial de vérifier les points 1 à 6. Laissons 7 en exercice et montrons 8. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}(\{1, \dots, n\})$.

$$\begin{aligned} V \left(K + \frac{i\pi}{2}, L - \frac{i\pi}{2} \right)_{\sigma'}^{\sigma} &= \exp \left[\left(K + \frac{i\pi}{2} \right) \left(\sum \sigma_j \sigma'_j \right) + \left(L - \frac{i\pi}{2} \right) \left(\sum \sigma_j \sigma'_{j+1} \right) \right] \\ &= \exp \left(K \sum \sigma_j \sigma'_j + L \sum \sigma_j \sigma'_{j+1} \right) \cdot \exp \left[\frac{i\pi}{2} \left(\sum \sigma_j \sigma'_j - \sum \sigma_j \sigma'_{j+1} \right) \right] \\ &= V(K, L)_{\sigma'}^{\sigma} \cdot (i)^{\#\{j|\sigma_j=\sigma'_j\} - \#\{j|\sigma_j \neq \sigma'_j\} - \#\{j|\sigma_j=\sigma'_{j+1}\} + \#\{j|\sigma_j \neq \sigma'_{j+1}\}} \\ &= V(K, L)_{\sigma'}^{\sigma} \cdot (i)^{n - 2\#\{j|\sigma_j \neq \sigma'_j\} - n + 2\#\{j|\sigma_j \neq \sigma'_{j+1}\}} \\ &= V(K, L)_{\sigma'}^{\sigma} \cdot (-1)^{\#\{j|\sigma'_j \neq \sigma_j\} + \#\{j|\sigma_j \neq \sigma'_{j+1}\}}. \end{aligned}$$

Dans toutes ces équations, les indices j doivent bien sûr être considérés modulo n . Observons maintenant que les valeurs $\sigma'_1, \sigma_1, \sigma'_2, \sigma_2, \sigma'_3, \dots$ sont disposées sur un cercle. Il doit donc y avoir un nombre pair de paires consécutives avec signe opposé. On obtient

$$(-1)^{\#\{j|\sigma'_j \neq \sigma_j\} + \#\{j|\sigma_j \neq \sigma'_{j+1}\}} = 1, \quad (45)$$

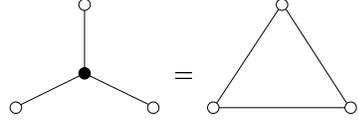
et donc

$$V \left(K + \frac{i\pi}{2}, L - \frac{i\pi}{2} \right)_{\sigma'}^{\sigma} = V(K, L)_{\sigma'}^{\sigma}. \quad \square$$

6 L'équation de Yang-Baxter

On s'intéresse maintenant à une équation qui va nous permettre de trouver de nouvelles relations entre les matrices V, W, C et R qu'on vient d'introduire.

Il s'agit de l'équation de *Yang-Baxter*, ou équation *étoile-triangle* qui s'énonce ainsi :

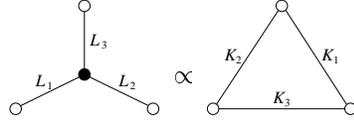


$$(46)$$

les inconnues étant bien sûr les poids de Boltzmann des différentes arêtes. Vu qu'on a ici des modèles d'Ising, il n'y a en fait que 6 inconnues, qu'on notera L_1, L_2, L_3 pour les arêtes de l'"étoile" et K_1, K_2, K_3 pour le "triangle". A vrai dire, il est trop restrictif de demander l'égalité. Il nous suffit pour la suite des calculs, de demander que les deux fonctions de partition soient proportionnelles. Avant de continuer, introduisons quelques notations qui simplifieront les écritures pendant cette partie technique.

$$\begin{aligned} \xi &: \equiv \text{ch}(L_1 + L_2 + L_3) \\ \xi_i &: \equiv \text{ch}(L_i - L_j - L_k), \quad i = 1, 2, 3 \\ \eta_i &: \equiv \exp(K_i), \quad i = 1, 2, 3 \\ \kappa &: \equiv \frac{\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2 \cdot \text{sh}(2L_1) \text{sh}(2L_2) \text{sh}(2L_3)}{2\xi^2} \end{aligned}$$

Proposition 6.1 Soient $L_i, K_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$, tels que



$$(47)$$

et tels que ξ et ξ_i , $i = 1, 2, 3$ soient tous non nuls, alors on a que $\text{sh}(2K_i) \text{sh}(2L_i) = \kappa$ pour $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. Observons tout d'abord que (47) est équivalent au système

$$\exists R \neq 0 \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} 2\xi R = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \\ 2\xi_i R = \eta_i \eta_j^{-1} \eta_k^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (48)$$

où R est le coefficient de proportionnalité. A son tour, (48) est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\xi_i} = \eta_j^2 \eta_k^2, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (49)$$

Les équations (49) entraînent que

$$\frac{\xi \xi_i}{\xi_j \xi_k} = \eta_i^4, \quad i = 1, 2, 3. \quad (50)$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que

$$\frac{\xi \xi_i}{\xi_j \xi_k} - 1 \equiv \frac{\text{sh}(2L_j) \text{sh}(2L_k)}{\xi_j \xi_k}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (51)$$

et

$$\eta_i^4 - 1 \equiv 2\eta_i^2 \text{sh}(2K_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (52)$$

sont vraies en toute généralité.

En vertu de (51) et (52), on remplace (50) par la formule équivalente

$$2\eta_i^2 \operatorname{sh}(2K_i) = \frac{\operatorname{sh}(2L_j) \operatorname{sh}(2L_k)}{\xi_j \xi_k}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (53)$$

et grâce à (49) on obtient

$$\operatorname{sh}(2K_i) \operatorname{sh}(2L_i) = \eta_i^2 \eta_j^2 \eta_k^2 \frac{\operatorname{sh}(2L_i) \operatorname{sh}(2L_j) \operatorname{sh}(2L_k)}{2\xi^2} = \kappa, \quad i = 1, 2, 3. \quad (54)$$

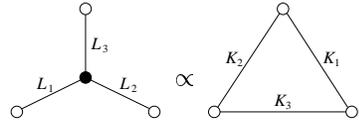
Ceci termine la preuve. \square

Si, inversement, on se donne K_1, L_1, K_2 et L_2 , satisfaisant $\operatorname{sh}(2K_1) \operatorname{sh}(2L_1) = \operatorname{sh}(2K_2) \operatorname{sh}(2L_2)$, est-il toujours possible de trouver K_3 et L_3 tels que (47) soit vérifiée Γ

Lemme 6.2 *Il existe un ensemble*

$$N \subset \left\{ (K_1, L_1, K_2, L_2) \in \mathbb{C}^4 \mid \operatorname{sh}(2K_1) \operatorname{sh}(2L_1) = \operatorname{sh}(2K_2) \operatorname{sh}(2L_2) \right\},$$

d'intérieur vide, tel que pour tout K_1, L_1, K_2, L_2 satisfaisant à la condition, $\operatorname{sh}(2K_1) \operatorname{sh}(2L_1) = \operatorname{sh}(2K_2) \operatorname{sh}(2L_2)$, $(K_1, L_1, K_2, L_2) \notin N$, il existe des uniques K_3, L_3 , définis modulo $i\pi$ tels que



$$(55)$$

Démonstration. On va supposer qu'on connaît déjà N et on va essayer de résoudre le problème consistant à trouver les K_3 et L_3 adéquats. Cette démarche va nous amener à énoncer progressivement toutes les propriétés souhaitées pour l'ensemble N . Il ne sera défini qu'à la fin de la démonstration.

Soient donc K_1, L_1, K_2, L_2 tels que $\operatorname{sh}(2K_1) \operatorname{sh}(2L_1) = \operatorname{sh}(2K_2) \operatorname{sh}(2L_2)$, $(K_1, L_1, K_2, L_2) \notin N$. Supposons maintenant que

$$\left\{ (K_1, L_1, K_2, L_2) \mid \xi = 0 \text{ ou } \xi_i = 0 \text{ pour l'un des } i = 1, 2, 3 \right\} \subset N. \quad (56)$$

On se place donc dans le cas $\xi \neq 0$, $\xi_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Or, on a déjà vu que, sous ces hypothèses, (55) est équivalent à

$$\left\{ \frac{\xi}{\xi_i} = \eta_j^2 \eta_k^2, \quad i = 1, 2, 3. \right. \quad (57)$$

Il est apparu, dans la démonstration de la proposition 6.1 que (57) impliquait (53). Il est donc raisonnable de chercher à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta_1^2 \operatorname{sh}(2K_1) = \frac{\operatorname{sh}(2L_2) \operatorname{sh}(2L_3)}{\xi_2 \xi_3} \\ 2\eta_2^2 \operatorname{sh}(2K_2) = \frac{\operatorname{sh}(2L_1) \operatorname{sh}(2L_3)}{\xi_1 \xi_3} \end{array} \right. , \quad (58)$$

qui est un système de deux équations à une inconnue. Si on introduit

$$\alpha : \equiv \frac{\text{sh}(2L_1)}{\text{sh}(2K_2)} = \frac{\text{sh}(2L_2)}{\text{sh}(2K_1)} \quad (59)$$

et qu'on observe que

$$2\xi_i \xi_3 \equiv \text{ch}(2L_j) + \text{ch}(2L_i) \text{ch}(2L_3) - \text{sh}(2L_i) \text{sh}(2L_3), \quad i = 1, 2 \quad (60)$$

alors, avec un peu de travail, on peut réécrire (58) sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(2L_3) \\ \text{sh}(2L_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(2L_1) \\ \text{ch}(2L_2) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Maintenant, (61) détermine entièrement $\text{ch}(2L_3)$ et $\text{sh}(2L_3)$, à condition toutefois que le système linéaire ne soit pas dégénéré. Supposons donc

$$\left\{ (K_1, L_1, K_2, L_2) \mid \begin{vmatrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{vmatrix} = 0 \right\} \subset N. \quad (62)$$

Pour que les valeurs obtenues

$$\text{ch}(2L_3) = \frac{\begin{vmatrix} \text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ \text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{vmatrix}} \quad (63)$$

et

$$\text{sh}(2L_3) = \frac{\begin{vmatrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{ch}(2L_1) \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{ch}(2L_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{vmatrix}} \quad (64)$$

déterminent bien un L_3 modulo $i\pi$, il faut encore contrôler qu'on a $\text{sh}^2(2L_3) + 1 = \text{ch}^2(2L_3)$, ce qui revient à vérifier

$$\begin{aligned} & \left| \begin{matrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{ch}(2L_1) \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{ch}(2L_2) \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} -\text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ -\text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{matrix} \right|^2 \\ & - \left| \begin{matrix} \text{ch}(2L_1) & \text{sh}(2L_2) + \eta_1^{-2}\alpha \\ \text{ch}(2L_2) & \text{sh}(2L_1) + \eta_2^{-2}\alpha \end{matrix} \right|^2 = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Une série de simplifications fastidieuses donne que (65) est égal à

$$\alpha \mid \text{ch}^2(2L_1) - \text{ch}^2(2L_2) \mid \eta_1^{-4}\alpha + 2\eta_1^{-2}\text{sh}(2L_2) - \eta_2^{-4}\alpha - 2\eta_2^{-2}\text{sh}(2L_1). \quad (66)$$

Par ailleurs on peut vérifier que

$$\begin{aligned} & \mid \text{sh}(2K_1) \text{sh}(2K_2) \mid \eta_1^{-4}\alpha + 2\eta_1^{-2}\text{sh}(2L_2) - \eta_2^{-4}\alpha - 2\eta_2^{-2}\text{sh}(2L_1) \\ & = \text{sh}(2K_2) \text{sh}(2L_2) - \text{sh}(2K_1) \text{sh}(2L_1) = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Nous avons donc établi (65) sous l'hypothèse supplémentaire

$$\{ (K_1, L_1, K_2, L_2) \mid \text{sh}(2K_1) \text{sh}(2K_2) = 0 \} \subset N, \quad (68)$$

donc il existe un unique L_3 , défini modulo $i\pi$, tel que (58) soit vérifié. Maintenant, l'équation

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \eta_2^2 \eta_3^2 \quad (69)$$

définit un unique K_3 modulo $i\pi$. Reste à vérifier, pour obtenir (57), qu'on a bien

$$\frac{\xi}{\xi_i} = \eta_j^2 \eta_k^2 \quad (70)$$

pour $i = 2$ et 3 . Rappelons nous des formules (51) et (52). Par construction, nous avons donc

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \eta_2^2 \eta_3^2, \quad \frac{\xi \xi_1}{\xi_2 \xi_3} = \eta_1^4, \quad \frac{\xi \xi_2}{\xi_1 \xi_3} = \eta_2^4. \quad (71)$$

Ces équations entraînent que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi}{\xi_2} = \eta_1^2 \eta_3^2 \\ \frac{\xi}{\xi_3} = \eta_1^2 \eta_2^2 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi}{\xi_2} = -\eta_1^2 \eta_3^2 \\ \frac{\xi}{\xi_3} = -\eta_1^2 \eta_2^2 \end{array} \right. . \quad (72)$$

Or, il est facile de vérifier que la deuxième alternative, combinée avec (58), implique

$$\text{sh}(2K_1) \text{sh}(2L_1) = -\text{sh}(2K_2) \text{sh}(2L_2), \quad (73)$$

qui est absurde, ceci à condition toutefois que

$$\{(K_1, L_1, K_2, L_2) \mid \text{sh}(2K_1) \text{sh}(2L_1) = \text{sh}(2K_2) \text{sh}(2L_2) = 0\} \subset N. \quad (74)$$

Maintenant, si on pose N égal à l'union des ensembles cités en (56), (62), (68) et (74), alors on peut mener l'argumentation du début à la fin, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Comme corollaire, nous avons :

Proposition 6.3 *Soient K_1, L_1, K_2, L_2 tels que $\text{sh}(2K_1) \text{sh}(2L_1) = \text{sh}(2K_2) \text{sh}(2L_2)$, alors les matrices $V(K_1, L_1)$ et $W(L_2, K_2)$ commutent.*

Démonstration. Supposons pour commencer que K_1, L_1, K_2 et L_2 satisfont aux conditions du lemme 6.2. Il existe donc un K_3 , un L_3 et un $R \neq 0$ tels que

$$R \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \circ \\ \backslash \quad / \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} K_2 \\ K_1 \\ K_3 \end{array} \quad (75)$$

Observons en plus que

$$\begin{array}{c} \circ \\ \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} K_3 \text{---} \\ \circ \end{array} \quad (76)$$

Nous allons ici faire grande utilisation du lemme 3.4 pour remplacer les formules (75) et (76) dans les prochains calculs. Le lecteur se convaincra que la constante multiplicative R n'est pas gênante. En effet, la démonstration du lemme 3.4 utilise la notation "matricielle" des fonctions de partition. Or, tout le monde sait que $c(AB) = (cA)B$ est valable quand A et B sont des matrices et c est un scalaire.

On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned}
& V(K_1, L_1)W(L_2, K_2) = \\
& \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \dots \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \dots \end{array} \\
& \equiv R \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \dots \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \dots \end{array} \\
& \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \dots \end{array} \equiv R \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \dots \end{array} \\
& \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \dots \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \dots \end{array} \\
& \qquad \qquad \qquad = W(L_2, K_2)V(K_1, L_1).
\end{aligned}$$

Les points de suspension au milieu signifient qu'on fait le tour de l'anneau en appliquant (75) à chaque étape, pour finalement revenir de l'autre côté.

Pour terminer la démonstration, il reste à montrer que les deux matrices commutent même en dehors des conditions du lemme 6.2. Il suffit pour cela d'observer que l'ensemble N du lemme 6.2 est d'intérieur vide et d'invoquer un argument de continuité. \square

On est maintenant en mesure d'énoncer un résultat principal concernant les matrices $V(K, L)$ et $W(K, L)$.

Proposition 6.4 *Soit $\kappa \in \mathbb{R}^*$, alors les matrices $V(K, L)$, $W(K, L)$ telles que $\text{sh}(2K) \text{sh}(2L) = \kappa$ engendrent avec les matrices C et R , définies en (42) et (43), une $*$ -algèbre abélienne de matrices.*

Démonstration. Les relations 1, 2 et 3 de la proposition 5.2 nous disent que l'algèbre engendrée par les matrices ci-dessus est déjà une $*$ -algèbre (car $\kappa \in \mathbb{R}$). Le fait que cette algèbre soit abélienne se vérifie donc sur les générateurs. Or, tout ce dont on a besoin à cet effet a déjà été énoncé dans les point 4, 5, 6 de la proposition 5.2 et dans la proposition 6.3. \square

Appelons \mathcal{A}_κ cette $*$ -algèbre de matrices $2^n \times 2^n$. Vu que \mathcal{A}_κ est abélienne, il existe une base orthonormée de \mathbb{C}^{2^n} qui diagonalise simultanément tous les éléments de \mathcal{A}_κ . Soit x un élément quelconque de cette base. On obtient des équations

$$\begin{aligned} V(K, L)x &= v(K, L; x)x \\ W(K, L)x &= w(K, L; x)x \\ Cx &= c(x)x \\ Rx &= r(x)x, \end{aligned} \tag{77}$$

où $v(K, L; x)$, $w(K, L; x)$, $c(x)$ et $r(x)$ sont des scalaires. Choisissons un tel x une fois pour toutes et notons les valeurs propres ci-dessus $v(K, L)$, $w(K, L)$, c et r , en ometant de signaler la dépendance par rapport à x . Si on applique le point 4 de la proposition 5.2 au vecteur x , on observe que $v(K, L) \cdot c = w(K, L)$. On peut donc définir

$$\Lambda(K, L) := c^{1/2}v(K, L) = c^{-1/2}w(K, L). \tag{78}$$

qui est une des racines carrées de la valeur propre de la matrice de transfert $T(K, L)$, associée au vecteur x (rappelons que $T(K, L)$ est la fonction de partition du système représenté en (38)). En effet, $T(K, L) = V(K, L)W(K, L)$, et on a bien $\Lambda^2(K, L) = v(K, L)w(K, L)$. On remarquera que $\Lambda(K, L)$ n'est définie qu'à un signe près.

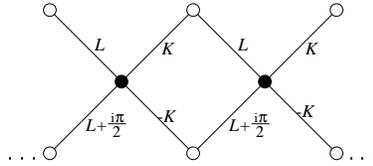
Avant de continuer avec les $\Lambda(K, L)$, montrons encore une propriété des matrices $V(K, L)$ et $W(K, L)$.

Proposition 6.5 *Les matrices V et W , satisfont la condition*

$$V(K, L)W(L + \frac{i\pi}{2}, -K) = (2i \operatorname{sh}(2L))^n Id + (-2i \operatorname{sh}(2K))^n R, \tag{79}$$

où R est la matrice définie en (43).

Démonstration. Le membre de droite de (79) est égal à la fonction de partition du système



Vu que ce système se décompose en segments qui n'“interragissent” pas entre eux, on a

$$\begin{aligned}
\left[V(K, L)W\left(L + \frac{i\pi}{2}, -K\right) \right]_{\sigma'}^{\sigma} &= \prod_{j=1}^n \begin{array}{c} \sigma_j \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ L \quad K \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ L + \frac{i\pi}{2} \quad K \\ \sigma'_j \circ \quad \sigma'_{j+1} \circ \end{array} \\
&= \prod_{j=1}^n \left(i^{\sigma'_j} \left(e^{K(\sigma_{j+1} - \sigma'_{j+1}) + L(\sigma_j + \sigma'_j)} - e^{-K(\sigma_{j+1} - \sigma'_{j+1}) - L(\sigma_j + \sigma'_j)} \right) \right) \quad (80) \\
&= \prod_{j=1}^n \left(2i^{\sigma'_j} \text{ch}(K(\sigma_{j+1} - \sigma'_{j+1})) \text{sh}(L(\sigma_j + \sigma'_j)) + \right. \\
&\quad \left. \text{sh}(K(\sigma_{j+1} - \sigma'_{j+1})) \text{ch}(L(\sigma_j + \sigma'_j)) \right).
\end{aligned}$$

Si $\sigma \neq \sigma'$ et $\sigma \neq -\sigma'$, il existera forcément un j tel que $\sigma_j = -\sigma'_j$ et $\sigma_{j+1} = \sigma'_{j+1}$. Le facteur correspondant à ce j sera donc nul et de même pour tout le produit. Considérons les deux cas restants.

1. Si $\sigma = \sigma'$, alors (80) devient

$$\prod_{j=1}^n {}^l 2i^{\sigma_j} \text{sh}(2L\sigma_j) = {}^l 2i \text{sh}(2L)^n. \quad (81)$$

2. Si $\sigma = -\sigma'$, (80) devient

$$\prod_{j=1}^n {}^l 2i^{-\sigma_j} \text{sh}(2K\sigma_{j+1}) = \prod_{j=1}^n {}^l 2i^{-\sigma_j} \text{sh}(2K\sigma_j) = {}^l -2i \text{sh}(2K)^n. \quad (82)$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned}
\left[V(K, L)W\left(L + \frac{i\pi}{2}, -K\right) \right]_{\sigma'}^{\sigma} &= {}^l 2i \text{sh}(2L)^n \delta_{\sigma, \sigma'} + {}^l -2i \text{sh}(2K)^n \delta_{\sigma, -\sigma'} \\
&= \left[{}^l 2i \text{sh}(2L)^n Id + {}^l -2i \text{sh}(2K)^n R \right]_{\sigma'}^{\sigma}. \quad (83)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.6 La fonction Λ , définie en (78) satisfait l'équation

$$\Lambda(K, L)\Lambda\left(L + \frac{i\pi}{2}, -K\right) = {}^l 2i \text{sh}(2L)^n + {}^l -2i \text{sh}(2K)^n r. \quad (84)$$

Démonstration. Appliquer la proposition 6.5 au vecteur propre x . □

En appliquant au vecteur x les points 5, 7 et 8 de la proposition 5.2, on obtient encore les relations

$$\Lambda(-K, -L) = r\Lambda(K, L), \quad (85)$$

$$\Lambda(K + i\pi, L) = \Lambda(K, L + i\pi) = (-1)^n \Lambda(K, L) \quad (86)$$

et

$$\Lambda\left(K + \frac{i\pi}{2}, L - \frac{i\pi}{2}\right) = \Lambda(K, L). \quad (87)$$

On est très intéressés à pouvoir considérer Λ comme une fonction définie sur

$$\left\{ (K, L) \in \mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z} \mid \operatorname{sh}(2K) \operatorname{sh}(2L) = \kappa \right\}, \quad (88)$$

cependant (86) nous dit que ce n'est possible que si n est pair. Supposons dorénavant que n est pair et introduisons

$$p := \frac{n}{2}. \quad (89)$$

La suite des calculs se basera sur une paramétrisation astucieuse de l'ensemble (88), qui permettra de voir Λ comme fonction d'une seule variable complexe.

7 Fonctions elliptiques

Une fonction méromorphe f est dite elliptique si il existe deux nombres ω_1 et ω_2 , \mathbb{R} -linéairement indépendants, tels que $f(u) = f(u + \omega_1) = F(u + \omega_2)$, $\forall u \in \mathbb{C}$. Les nombres ω_1 et ω_2 s'appellent les *périodes* de f . On dénomme *parallélogramme fondamental* (ou rectangle fondamental) la surface $\mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$.

Nous n'avons pas l'intention de faire ici toute la théorie des fonctions elliptiques. Ennonçons simplement, et sans démonstration pour la plupart, les divers résultats que nous allons utiliser. Le lecteur qui veut en savoir plus sur le sujet pourra par exemple consulter [Chan].

Proposition 7.1 *Toute fonction elliptique holomorphe est constante.*

Proposition 7.2 *soit f , une fonction elliptique. Alors la somme sur le parallélogramme fondamental des multiplicités des zéros de f est égale à la somme des multiplicités des pôles de f .*

On appelle ce nombre le *degré* de f .

Proposition 7.3 *soit f , une fonction elliptique de degré d . Alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(a)$ se compose de d points (comptés dans le parallélogramme fondamental et avec multiplicités).*

Démonstration. Appliquer la proposition 7.2 à $f - a$, qui a les mêmes pôles que f . \square

Proposition 7.4 *Soient f et g deux fonctions elliptiques de même degré avec mêmes zéros et pôles (comptés avec multiplicités). Alors f et g sont proportionnelles.*

Démonstration. Appliquer la proposition 7.1 au quotient $\frac{f}{g}$. \square

Proposition 7.5 Soit f une fonction elliptique de degré d , et soient a_1, \dots, a_d ses zéros et b_1, \dots, b_d ses pôles (comptés avec multiplicités). Alors

$$\sum_{i=1}^d a_i = \sum_{i=1}^d b_i \quad \text{mod}(\omega_1, \omega_2).$$

Les fonctions elliptiques que nous utiliserons le plus sont les fonctions sn , cn et dn de Jacobi, dépendant d'un paramètre $k \in]0, 1[$.

Proposition 7.6 Pour tout nombre réel $k \in]0, 1[$, il existe des nombres $I, I' \in \mathbb{R}$ et des fonctions elliptiques sn , cn et dn , à valeurs réelles sur \mathbb{R} , de degré 4 et de périodes $4I$ et $4iI'$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{sn}(-u) &= -\text{sn}(u) & \text{cn}(-u) &= \text{cn}(u) & \text{dn}(-u) &= \text{dn}(u) \\ \text{sn}(2I - u) &= \text{sn}(u) & \text{cn}(2I - u) &= -\text{cn}(u) & \text{dn}(2I - u) &= \text{dn}(u) \\ \text{sn}(2iI' - u) &= -\text{sn}(u) & \text{cn}(2iI' - u) &= -\text{cn}(u) & \text{dn}(2iI' - u) &= -\text{dn}(u) \end{aligned}$$

$$\text{sn}(0) = 0 \quad \text{cn}(I) = 0 \quad \text{dn}(I + iI') = 0$$

$$\text{cn}(0) = \text{dn}(0) = 1$$

$$\text{sn}'(0) = 1 \quad \text{sn}(iI') = \text{sn}(iI') = \text{dn}(iI') = \infty$$

$$\text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u) = k^2 \text{sn}^2(u) + \text{dn}^2(u) = 1.$$

De plus, pour un choix donné de k , les fonctions sn , cn et dn sont uniques à satisfaire toutes les formules ci-dessus. On appelle k , le *modulus* des fonctions sn , cn et dn .

Remarquons que sn est aussi $2iI'$ -périodique, cn est aussi $2I + 2iI'$ -périodique et dn est aussi $2I$ -périodique. Considérées comme telles, les fonctions sn , cn et dn sont de degré 2. Il est toutefois plus agréable de garder les périodes communes $4I$ et $4iI'$. Dorénavant, chaque fois qu'on se donne un modulus k , les lettres I et I' désigneront automatiquement les quarts de périodes des fonctions de Jacobi associées.

Une des propriétés les plus remarquables des fonctions de Jacobi, c'est qu'il existe des "formules d'addition" :

$$\text{sn}(u + v) = \frac{\text{sn}(u) \text{cn}(v) \text{dn}(v) + \text{sn}(v) \text{cn}(u) \text{dn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u) \text{sn}^2(v)}. \quad (90)$$

$$\text{cn}(u + v) = \frac{\text{cn}(u) \text{cn}(v) + \text{sn}(u) \text{dn}(u) \text{sn}(v) \text{dn}(v)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u) \text{sn}^2(v)}. \quad (91)$$

$$\text{dn}(u + v) = \frac{\text{dn}(u) \text{dn}(v) + k^2 \text{sn}(u) \text{cn}(u) \text{sn}(v) \text{cn}(v)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u) \text{sn}^2(v)}. \quad (92)$$

Posons encore $k' = +\sqrt{1 - k^2}$. On a ici un tableau qui résume quelques

propriétés supplémentaires des fonctions de Jacobi de modulus k :

f	sn	cn	dn
$f(u + I)$	$\frac{\text{cn}}{\text{dn}}$	$-k' \frac{\text{sn}}{\text{dn}}$	$k' \frac{1}{\text{dn}}$
$f(u + I + iI')$	$-k^{-1} \frac{\text{dn}}{\text{cn}}$	$-i \frac{k'}{k} \frac{1}{\text{cn}}$	$ik' \frac{\text{sn}}{\text{cn}}$
$f(u + iI')$	$k^{-1} \frac{1}{\text{sn}}$	$-ik^{-1} \frac{\text{dn}}{\text{sn}}$	$-i \frac{\text{cn}}{\text{sn}}$
f'	$\text{cn} \cdot \text{dn}$	$-\text{sn} \cdot \text{dn}$	$-k^2 \text{sn} \cdot \text{cn}$

(93)

Voici encore les termes principaux aux voisinages des points spéciaux :

f	sn	cn	dn
$f(u)$	$u + O(u^3)$	$1 + O(u^2)$	$1 + O(u^2)$
$f(I + u)$	$1 + O(u^2)$	$-k'u + O(u^3)$	$k' + O(u^2)$
$f(I + iI' + u)$	$k^{-1} + O(u^2)$	$-i \frac{k'}{k} + O(u^2)$	$ik'u + O(u^3)$
$f(iI' + u)$	$k^{-1} \frac{1}{u} + O(u)$	$-ik^{-1} \frac{1}{u} + O(u)$	$-i \frac{1}{u} + O(u)$

(94)

Lemme 7.7 Soit $k \in]0, 1[$, et soient $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x^2 + y^2 = k^2 x^2 + z^2 = 1$, alors il existe un unique $u \in \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$ satisfaisant

$$\text{sn}(u) = x, \quad \text{cn}(u) = y \quad \text{et} \quad \text{dn}(u) = z. \quad (95)$$

Démonstration.

Existence : Soit $u_1 \in \text{dn}^{-1}(z)$, qui n'est pas vide par la proposition 7.3.

$$k^2 \text{sn}^2(u_1) + \text{dn}^2(u_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sn}(u_1) = \pm x.$$

Si $\text{sn}(u_1) = x$, posons $u_2 := u_1$, sinon $u_2 := -u_1$, et on a ainsi $u_2 \in \text{sn}^{-1}(x) \cap \text{dn}^{-1}(z)$. Maintenant

$$\text{sn}^2(u_2) + \text{cn}^2(u_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{cn}(u_2) = \pm y.$$

Si $\text{cn}(u_2) = y$, posons $u := u_2$, sinon $u := I - u_2$. On vérifie facilement que $\text{sn}(u) = x$, $\text{cn}(u) = y$ et que $\text{dn}(u) = z$.

Unicité : Soient

$$\begin{aligned} \alpha &: u \mapsto -u \\ \beta &: u \mapsto 2I - u \\ \gamma &: u \mapsto 2I + 2iI' - u \end{aligned}$$

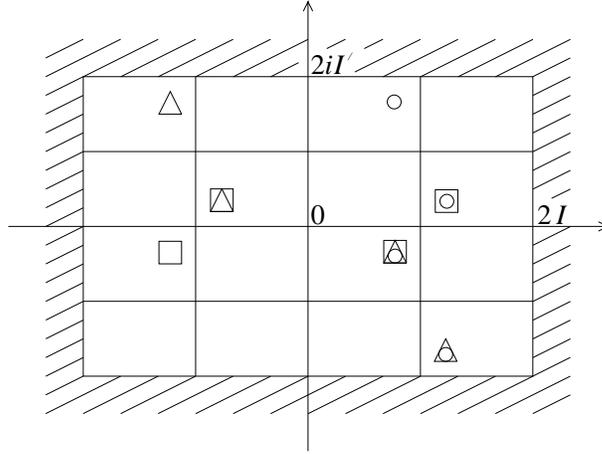
des symétries de $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$, et soit G le groupe commutatif d'ordre 8 engendré par α , β et γ . Notons $G_{\eta\xi}$, les sous groupe d'ordre 4 engendré par les symétries η et ξ .

Soient u, u' satisfaisant tous deux (95) :

$$\begin{aligned} \text{sn}(u) = \text{sn}(u') &\Rightarrow u' \in G_{\beta\gamma}(u) \\ \text{cn}(u) = \text{cn}(u') &\Rightarrow u' \in G_{\alpha\gamma}(u) \\ \text{dn}(u) = \text{dn}(u') &\Rightarrow u' \in G_{\alpha\beta}(u). \end{aligned}$$

Or, il se trouve que $G_{\alpha\beta} \cap G_{\alpha\gamma} \cap G_{\beta\gamma}$ est réduit à un seul élément. On a donc $u = u'$. \square

Pour un certain choix de x, y, z satisfaisant $x^2 + y^2 = k^2 x^2 + z^2 = 1$, voici les ensembles $\text{sn}^{-1}(x)$, $\text{cn}^{-1}(y)$, $\text{dn}^{-1}(z)$ dans le rectangle fondamental :



$$\text{sn}^{-1}(x) : \circ, \text{cn}^{-1}(y) : \triangle, \text{dn}^{-1}(z) : \square.$$

Grace aux fonctions de Jacobi, on va pouvoir paramétriser l'ensemble (88). Désagréablement, le paramètre κ de (88) peut prendre toutes les valeurs réelles positives, alors que le module des fonctions de Jacobi ne prend que les valeurs de 0 à 1. C'est pour cela qu'on va dorénavant toujours séparer les cas $\kappa > 1$ et $\kappa < 1$.

Proposition 7.8 *Soit κ un réel positif différent de 1. On a une paramétrisation bijective de l'ensemble des $(K, L) \in \mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z}$ satisfaisant $\text{sh}(2K) \text{sh}(2L) = \kappa$ par*

$$u \in \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z} \setminus \{0, iI', 2iI', 3iI', 2I, 2I + iI', 2I + 2iI', 2I + 3iI'\} \quad (96)$$

donnée par :

1. Si $\kappa > 1$

$$\begin{cases} \text{sh}(2K) = -i \text{sn}(u) \\ \text{ch}(2K) = \text{cn}(u) \\ \text{sh}(2L) = i\kappa / \text{sn}(u) \\ \text{ch}(2L) = i\kappa \text{dn}(u) / \text{sn}(u) \end{cases} \quad (97)$$

où sn , cn et dn sont les fonctions de Jacobi $(4I, 4iI')$ -périodiques de module κ^{-1} .

2. Si $\kappa < 1$

$$\begin{cases} \text{sh}(2K) = -i\kappa \text{sn}(u) \\ \text{ch}(2K) = \text{dn}(u) \\ \text{sh}(2L) = i / \text{sn}(u) \\ \text{ch}(2L) = i \text{cn}(u) / \text{sn}(u) \end{cases} \quad (98)$$

où sn , cn et dn sont de module κ .

Pour éviter des confusions, on notera toujours " κ " pour la constante

$\text{sh}(2K) \text{sh}(2L)$ et “ k ” pour le modulus des fonctions de Jacobi. Ils sont reliés par la relation

$$k := \begin{cases} \kappa^{-1} & \text{si } \kappa > 1 \\ \kappa & \text{si } \kappa < 1. \end{cases} \quad (99)$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ (K, L) \in \mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z} \mid \text{sh}(2K) \text{sh}(2L) = \kappa \right\} \\ B &:= \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{a - a^{-1}}{2} \cdot \frac{b - b^{-1}}{2} = \kappa, \quad a, b \neq 0 \right\} \\ C &:= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = \kappa^{-2}x^2 + z^2 = 1, \quad x \neq 0 \right\} \\ D &:= \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z} \setminus \{0, iI', 2iI', 3iI', 2I, 2I + iI', 2I + 2iI', 2I + 3iI'\}. \end{aligned} \quad (100)$$

Nous allons montrer qu’il y a des bijections entre chacun de ces ensembles. Entre A et B , la bijection est donnée par

$$\begin{cases} a & := e^{2K} \\ b & := e^{2L} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} K & := \frac{1}{2} \ln(a) \\ L & := \frac{1}{2} \ln(b) \end{cases}. \quad (101)$$

Entre B et C , on a

$$\begin{cases} x & := i \frac{a - a^{-1}}{2} = i\kappa \left(\frac{b - b^{-1}}{2} \right)^{-1} \\ y & := \frac{a + a^{-1}}{2} \\ z & := \frac{b + b^{-1}}{b - b^{-1}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a & := y - ix \\ b & := i\kappa \frac{1+z}{x} \\ a^{-1} & := y + ix \\ b^{-1} & := i\kappa \frac{-1+z}{x} \end{cases}. \quad (102)$$

Finalement, entre C et D , on a les formules

$$\begin{cases} x = \text{sn}(u), & y = \text{cn}(u), & z = \text{dn}(u) & \text{si } \kappa > 1 \\ x = \kappa \text{sn}(u), & y = \text{dn}(u), & z = \text{cn}(u) & \text{si } \kappa < 1, \end{cases} \quad (103)$$

qui définissent bien u de par le lemme 7.7. Remarquons que si on tient à n’avoir que les valeurs finies de x, y, z et que $x \neq 0$ alors, il convient d’enlever les points $0, iI', 2iI', \dots$ de $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$. Il est facile de voir qu’en composant toutes ces bijections, on obtient les formules (97) et (98). \square

Le cas $\kappa = 1$ est légèrement différent, bien qu’essentiellement on l’obtient en faisant tendre κ vers 1. En effet l’ensemble B de (100) n’est plus irréductible (au sens de la géométrie algébrique). Du coup, on ne paramétrise plus que la moitié de A .

Rappelons-nous qu’à la base, on s’intéressait à K et L réels positifs (c’est comme ça qu’on avait défini le modèle d’Ising).

Lemme 7.9 *Selon les conventions de la proposition 7.8, on a*

$$K, L \in \mathbb{R}_+ \quad \Leftrightarrow \quad u \in]0, iI'[\subset i\mathbb{R}/4iI'\mathbb{Z}. \quad (104)$$

Démonstration. L'implication “ \Leftarrow ” se vérifie à la main (pour autant que le lecteur soit suffisamment familier avec les fonctions de Jacobi!). Vu que $u \rightarrow 0 \Rightarrow (K, L) \rightarrow (0, \infty)$ et que $u \rightarrow iI' \Rightarrow (K, L) \rightarrow (\infty, 0)$, on a une bijection

$$u \in]0, iI'[\longrightarrow \{ (K, L) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid \text{sh}(2K) \text{sh}(2L) = \kappa \},$$

ce qui achève la preuve. \square

Voici maintenant un petit dictionnaire qui permet de traduire en fonction de u les opérations faites avec K et L .

Lemme 7.10 *Soit Φ la bijection construite à la proposition 7.8 :*

$$\begin{array}{ccc} \{ (K, L) \mid \text{sh}(2K) \text{sh}(2L) = \kappa \} & \xleftrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z} \\ \cup & & \cup \\ (K, L) & & u \end{array},$$

alors on a une correspondance (à savoir, le fait d'être conjuguées par Φ) entre les différentes symétries des ensembles ci-dessus :

$$(K, L) \mapsto (-K, L + \frac{i\pi}{2}) \quad \rightsquigarrow \quad u \mapsto -u \quad (105)$$

$$(K, L) \mapsto (K + \frac{i\pi}{2}, L + \frac{i\pi}{2}) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u \mapsto u + 2I & \text{si } \kappa > 1 \\ u \mapsto u + 2I + 2iI' & \text{si } \kappa < 1 \end{cases} \quad (106)$$

$$(K, L) \mapsto (L + \frac{i\pi}{2}, -K) \quad \rightsquigarrow \quad u \mapsto u + iI' \quad (107)$$

Démonstration. Rappelons nous des ensembles A, B, C et D de (100) et essayons de suivre pas à pas ce que deviennent les symétries de A quand on les conjugue par les bijections (101), (102) et (103). Pour la première, on a

$$\begin{array}{ccc} (K, L) \mapsto (-K, L + \frac{i\pi}{2}) & \rightsquigarrow & (a, b) \mapsto (a^{-1}, -b) \rightsquigarrow \\ (x, y, z) \mapsto (-x, y, z) & \rightsquigarrow & u \mapsto -u. \end{array}$$

Pour la seconde :

$$\begin{array}{ccc} (K, L) \mapsto (K + \frac{i\pi}{2}, L + \frac{i\pi}{2}) & \rightsquigarrow & (a, b) \mapsto (-a, -b) \rightsquigarrow \\ (x, y, z) \mapsto (-x, -y, z) & \rightsquigarrow & \begin{cases} u \mapsto u + 2I & \text{si } \kappa > 1 \\ u \mapsto u + 2I + 2iI' & \text{si } \kappa < 1 \end{cases} \end{array}.$$

Finalement, pour la dernière :

$$\begin{array}{ccc} (K, L) \mapsto (L + \frac{i\pi}{2}, -K) & \rightsquigarrow & (a, b) \mapsto (-b, a^{-1}) \rightsquigarrow \\ (x, y, z) \mapsto (\kappa \frac{1}{x}, -i\kappa \frac{z}{x}, -i \frac{y}{x}) & \rightsquigarrow & u \mapsto u + iI'. \end{array}$$

Les deux premiers cas se vérifient facilement. Par contre, le dernier est relativement délicat. Il faut bien sûr le vérifier indépendamment pour $\kappa > 1$ et pour $\kappa < 1$. Pour cela, on utilisera les données du tableau (93). C'est ici qu'il convient d'être attentif car les fonction sn , cn et dn qu'on utilise en (103) sont de modulus k , qui est tantôt égal à κ , et tantôt égal à κ^{-1} . \square

Grace au travail fait dans la proposition 7.8, la fonction Λ , définie en (78), qui était une fonction de K et L , devient une fonction de $u \in \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$. Pour voir que Λ (comme fonction de u) est une fonction elliptique, il faut montrer qu'elle n'a pas de singularités essentielles. Il suffit pour cela de tester les points $0, iI', 2iI' \dots \in \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$ (vu que partout ailleurs Λ est visiblement holomorphe).

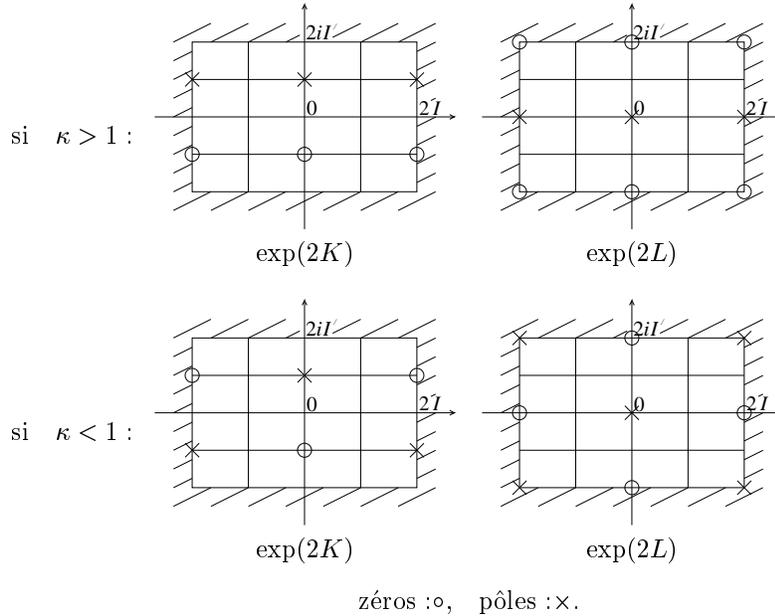
Lemme 7.11 *Soit $v(K, L)$, la fonction définie en (77). Selon la paramétrisation de la proposition 7.8, elle peut être considérée comme fonction de u . Alors, sur le rectangle fondamental, la fonction $v(u)$ a des pôles d'ordre au plus p en $0, iI', 2iI', 3iI', 2I, 2I + iI', 2I + 2iI'$ et $2I + 3iI'$ (rappelons que $2p = n$ et que n avait été fixé depuis les définitions (40) et (41)).*

Démonstration. Selon la proposition 7.8, on a que

$$\text{si } \kappa > 1 : \quad \begin{cases} \exp(2K) = \text{cn}(u) - i \text{sn}(u) \\ \exp(2L) = i \kappa^{-1} \text{dn}(u) + 1 / \text{sn}(u), \end{cases} \quad (108)$$

$$\text{si } \kappa < 1 : \quad \begin{cases} \exp(2K) = \text{dn}(u) - i \kappa \text{sn}(u) \\ \exp(2L) = i \kappa \text{cn}(u) + 1 / \text{sn}(u). \end{cases} \quad (109)$$

Si on considère $\exp(2K)$ et $\exp(2L)$ comme des fonctions de u , l'ensemble de zéros et des pôles de la première est composé de $iI', 3iI', 2I + iI'$ et $2I + 3iI'$ alors que l'ensemble de zéros et des pôles de la seconde est composé de $0, 2iI', 2I$ et $2I + 2iI'$. En effet, il est facile de vérifier que les points mentionnés ci-dessus sont bien des zéros et des pôles simples de $\exp(2K)$ et $\exp(2L)$ (deux zéros et deux pôles dans chaque cas). Par ailleurs, il est évident qu'il n'y a pas d'autres pôles, on en déduit donc par la proposition 7.2, qu'il n'y a pas non plus d'autres zéros.



Maintenant, les composantes de la matrice $V(K, L)$, sont données par

$$\begin{aligned} V(u)_{\sigma'}^{\sigma} &\equiv V(K, L)_{\sigma'}^{\sigma} = \exp\left(K(2p - 2\#\{j|\sigma_j = \sigma'_j\}) + L(2p - 2\#\{j|\sigma_j = \sigma'_{j+1}\})\right) \\ &= \exp(2K)^{p-\#\{j|\sigma_j = \sigma'_j\}} \exp(2L)^{p-\#\{j|\sigma_j = \sigma'_{j+1}\}}. \end{aligned}$$

Les exposants ci-dessus prennent des valeurs entre $-p$ et p . Vues comme fonctions de u , les composantes de la matrice V ont donc des pôles d'ordre au plus p en $0, iI', 2iI' \dots$

Par ailleurs, rappelons que x est un vecteur propre de $V(K, L)$ qui avait été choisi une fois pour toutes. Les composantes de x étant naturellement indexées par les états $\sigma \in \mathcal{E}(\{1, \dots, n\})$, on les notera x^σ . Vu que x est vecteur propre, on a que

$$\sum_{\sigma} V(K, L)_{\sigma}^{\sigma'} x^\sigma = v(K, L) x^{\sigma'},$$

ou encore

$$v(u) \equiv v(K, L) = \sum_{\sigma} V(K, L)_{\sigma}^{\sigma'} \frac{x^\sigma}{x^{\sigma'}}.$$

Quitte à choisir un σ' tel que $x^{\sigma'} \neq 0$, on a donc exprimé $v(u)$ comme combinaison linéaire des éléments d'une ligne de la matrice $V(u) \equiv V(K, L)$. Les pôles d'une combinaison linéaire de fonctions étant au plus ceux des fonctions dont on était partis, ceci achève la démonstration du lemme. \square

Corollaire 7.12 *La fonction $\Lambda(u) = c^{1/2}v(u)$ a, elle aussi, des pôles d'ordre au plus p en $0, iI', 2iI', 3iI', 2I, iI' + 2I, 2iI' + 2I$ et $3iI' + 2I$.*

Remarque. On verra par un autre argument que ces pôles sont en fait d'ordre exactement p .

8 Les zéros de $\Lambda(u)$

Rassemblons toutes les informations que l'on a déjà sur la fonction $\Lambda(u)$:

Proposition 8.1 *La fonction $\Lambda(u)$, définie en (78) et vue comme fonction de $u \in \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$ par la paramétrisation de la proposition 7.8, est une fonction elliptique qui satisfait*

$$\begin{cases} \Lambda(u + 2I) = \Lambda(u) & \text{si } \kappa > 1 \\ \Lambda(u + 2I + 2iI') = \Lambda(u) & \text{si } \kappa < 1, \end{cases} \quad (110)$$

$$\Lambda(u + 2iI') = r \Lambda(u) \quad (111)$$

et

$$\Lambda(u)\Lambda(u + iI') = \begin{cases} \left(\frac{2\kappa}{\operatorname{sn}(u)}\right)^{2p} + \left(2s n(u)\right)^{2p} r & \text{si } \kappa > 1 \\ \left(\frac{2}{\operatorname{sn}(u)}\right)^{2p} + \left(2\kappa \operatorname{sn}(u)\right)^{2p} r & \text{si } \kappa < 1. \end{cases} \quad (112)$$

Démonstration. Pour montrer (110), il suffit de combiner (87) avec (106).
 Pour (111), on observe en composant deux fois (107) puis (106) que

$$(K, L) \mapsto (-K, -L) \rightsquigarrow \begin{cases} u \mapsto u + 2I + 2iI' & \text{si } \kappa > 1 \\ u \mapsto u + 2I & \text{si } \kappa < 1, \end{cases}$$

et on applique à (85). On obtient

$$\begin{aligned} \Lambda(u + 2I + 2iI') &= r \Lambda(u) & \text{si } \kappa > 1 \\ \Lambda(u + 2I) &= r \Lambda(u) & \text{si } \kappa < 1, \end{aligned}$$

puis on utilise le résultat (110), qu'on a déjà établi.

Finalement, (112) se déduit de (84) et (107), en substituant $\text{sh}(2L)$ et $\text{sh}(2K)$ par les valeurs données en (97) en (98). \square

Pour localiser les zéros de Λ , (112) est extrêmement utile. En effet, si u satisfait

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\kappa}{\text{sn}(u)}\right)^{2p} + \left(2\text{sn}(u)\right)^{2p} r = 0 & \quad \text{si } \kappa > 1 \\ \left(\frac{2}{\text{sn}(u)}\right)^{2p} + \left(2\kappa \text{sn}(u)\right)^{2p} r = 0 & \quad \text{si } \kappa < 1, \end{aligned} \quad (113)$$

alors ou bien u , ou bien $u + iI'$ est un zéro de Λ . Attention, Il ne faut pas s'attendre à ce qu'on puisse déterminer exactement les zéros de Λ car les définitions (77) et (78) dépendent du choix, jusqu'ici arbitraire, du vecteur propre x .

Rappelons que r est une valeur propre de la matrice R , définie en (43). On sait depuis la proposition 5.2 que $R^2 = Id$, donc r ne peut prendre que les valeurs $+1$ et -1 (ceci dépend du choix du vecteur x). La formule (113) est donc équivalente à

$$\begin{aligned} |\kappa^{-1} \text{sn}^2(u)|^{2p} &= -r & \text{si } \kappa > 1 \\ |\kappa \text{sn}^2(u)|^{2p} &= -r & \text{si } \kappa < 1, \end{aligned} \quad (114)$$

qu'on est bien content de pouvoir réécrire sous la forme plus compacte

$$|k \text{sn}^2(u)|^{2p} = -r \quad (115)$$

Une condition nécessaire à (115) est que la norme au carré de $\text{sn}(u)$ soit égale à l'inverse du modulus (le modulus k vaut κ^{-1} dans le premier cas et κ dans le second). Regardons déjà quand cette condition est vérifiée.

Lemme 8.2 *Soit sn la fonction de Jacobi de périodes $4I$ et $2iI'$ et de modulus k . Alors on a*

$$|\text{sn}(u)|^2 = k^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(u) = \frac{I'}{2} \pmod{I'} \quad (116)$$

et en plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{sn} : \left\{ u \in \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} \mid \text{Im}(u) = I'(m + \frac{1}{2}) \right\} \rightarrow \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = k^{-1} \right\} \quad (117)$$

est une bijection.

Démonstration. On sait par (93) que $\operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(u + iI') = k^{-1}$, par ailleurs, vu que $\operatorname{sn}(u)$ est réelle pour $u \in \mathbb{R}$, on a aussi $\operatorname{sn}(\bar{u}) = \operatorname{sn}(u)$. Maintenant, si $\operatorname{Im}(u) = \frac{I'}{2} \pmod{I'}$, alors $u + I' = \bar{u} \pmod{2iI'}$. Pour un tel u , on a donc

$$\begin{aligned} |\operatorname{sn}(u)|^2 &= \operatorname{sn}(u) \cdot \overline{\operatorname{sn}(u)} \\ &= \operatorname{sn}(u) \cdot \operatorname{sn}(\bar{u}) \\ &= \operatorname{sn}(u) \cdot \operatorname{sn}(u + I') = k^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc exhibé deux sous-ensembles de $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 2iI'\mathbb{Z}$ sur lesquels $|\operatorname{sn}(u)|^2 = k^{-1}$, il s'agit de

$$\left\{ u \mid \operatorname{Im}(u) = \frac{I'}{2} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ u \mid \operatorname{Im}(u) = -\frac{I'}{2} \right\}. \quad (118)$$

Reste à voir que c'est les seuls.

Les ensembles (118) sont topologiquement deux cercles disjoints. Par ailleurs on sait que $\operatorname{sn}' = \operatorname{cn} \operatorname{dn}$ ne s'annule pas sur eux. La fonction sn est donc un revêtement des ensembles (118) sur le cercle de rayon $k^{-\frac{1}{2}}$. Or, sn est une fonction elliptique $(4I, 2iI')$ -périodique de degré 2, c'est à dire que chaque point $z \in \mathbb{C}$ a exactement deux préimages dans $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 2iI'\mathbb{Z}$. On en déduit que

$$\operatorname{sn} : \left\{ u \mid \operatorname{Im}(u) = \frac{I'}{2} \right\} \rightarrow \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = k^{-1} \right\} \quad (119)$$

et

$$\operatorname{sn} : \left\{ u \mid \operatorname{Im}(u) = -\frac{I'}{2} \right\} \rightarrow \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = k^{-1} \right\} \quad (120)$$

sont des bijections et que les ensembles (118) sont les seules préimages du cercle de rayon $k^{-\frac{1}{2}}$. \square

L'existence des bijections (117) nous permet d'introduire une fonction

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/4I\mathbb{Z} \quad (121)$$

telle que

$$\operatorname{sn} \operatorname{!} \phi(\theta) - \frac{iI'}{2} = -k^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta}. \quad (122)$$

On voit facilement que

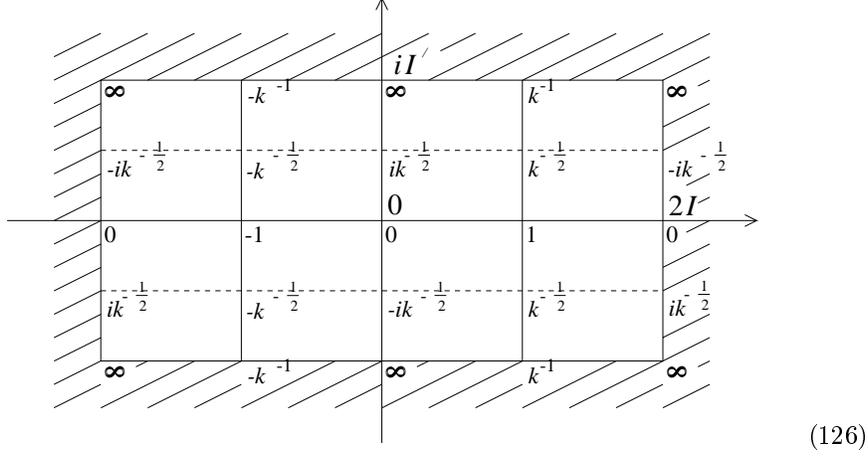
$$\phi(0) = -I, \quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \phi(\pi) = I \quad \text{et} \quad \phi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2I \quad (123)$$

et que

$$\phi(\pi - \theta) = -\phi(\theta). \quad (124)$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\operatorname{sn} \operatorname{!} \phi(\theta) + \frac{iI'}{2} = -k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\theta}. \quad (125)$$



Les valeurs prises par la fonction sn sur le rectangle fondamental.

Revenons-en à l'équation (115). On peut maintenant affirmer que

$$(k \operatorname{sn}^2(u))^{2p} = -r \Leftrightarrow u = \begin{cases} \phi\left(\frac{\pi j}{2p}\right) \pm \frac{I'}{2} & 1 \leq j \leq 4p \text{ si } r = -1 \\ \phi\left(\frac{\pi(j-1/2)}{2p}\right) \pm \frac{I'}{2} & 1 \leq j \leq 4p \text{ si } r = +1. \end{cases} \quad (127)$$

En effet, $(k \operatorname{sn}^2(u))^{2p}$ est elliptique de degré $8p$ et on vérifie par (122) et (125) qu'on a bien ici les $8p$ préimages de $-r$ dans $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 2iI'\mathbb{Z}$. Posons donc

$$\phi_j := \begin{cases} \phi\left(\frac{\pi j}{2p}\right) & \text{si } r = -1 \\ \phi\left(\frac{\pi(j-1/2)}{2p}\right) & \text{si } r = +1. \end{cases} \quad (128)$$

Rappelons (112), qu'on remet sous la forme de (84) :

$$\Lambda(u)\Lambda(u+iI') = (2i \operatorname{sh}(2L))^{2p} + (2i \operatorname{sh}(2K))^{2p} r. \quad (129)$$

Vu que (113) est équivalent à (115), on a par (127) et (128) que

$$\Lambda(u)\Lambda(u+iI') = 0 \Leftrightarrow u = \phi_j + iI'(m+1/2) \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq 4p \\ m \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{matrix} \quad (130)$$

Sur le rectangle fondamental $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$, $\Lambda(u)$ a donc $8p$ zéros, répartis parmi ceux de $\Lambda(u)\Lambda(u+iI')$. On peut maintenant compléter le corollaire 7.12 et affirmer par la proposition 7.2 que les huit pôles de $\Lambda(u)$ sont bien d'ordre p . Soit

$$\mathcal{Z} \subset \{\phi_j + iI'(m+1/2)\} \subset \mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$$

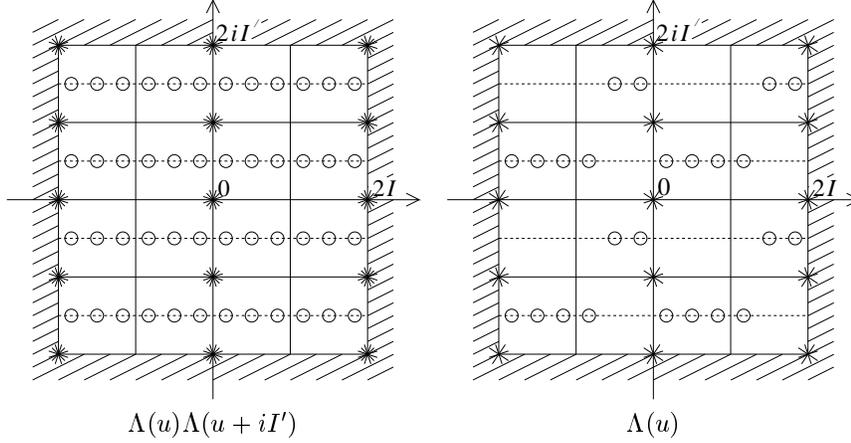
l'ensemble des zéros de $\Lambda(u)$. On a par (110) et (111) que

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z} + 2I = \mathcal{Z} + 2iI'.$$

Par ailleurs

$$\{\phi_j + iI'(m+1/2)\} = \mathcal{Z} \sqcup (\mathcal{Z} + iI').$$

En effet, les zéros de (129) sont tous simples (on peut le voir en dérivant ou bien en appliquant la proposition 7.2), ce qui justifie l'union disjointe.



zéros : \circ , pôles : \times .

On en déduit qu'il existe des $\gamma_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq 2p$ tels que

$$\Lambda(u) = 0 \Leftrightarrow u = \phi_j - \gamma_j \frac{iI'}{2} \pmod{2I, 2iI'} \quad 1 \leq j \leq 2p. \quad (131)$$

Avant de continuer, discutons un peu les résultats obtenus. On avait à la base, une matrice de transfert $T(K, L) \equiv T(u)$ dont on cherchait la valeur propre maximale. On a choisi un vecteur propre quelconque x et on a introduit une grandeur $\Lambda(u) \equiv \Lambda(u; x)$, définie à un signe près, telle que

$$T(u)x = \Lambda^2(u)x.$$

Jusqu'à présent, on a uniquement cherché à dire des choses qui soient vérifiées pour tous les $\Lambda(u; x)$. Vu qu'il existe 2^n vecteurs propres x (rappelons que $n = 2p$), on s'attend à trouver 2^n fonctions $\Lambda(u) \equiv \Lambda(u; x)$ différentes, et qui n'ont pas les mêmes ensembles de zéros $\mathcal{Z}(x)$ (ceci est une hypothèse a priori et il n'y a aucun argument qui la justifie!). La formule (131) nous dit maintenant quelles sont les possibilités pour $\mathcal{Z}(x)$. Il y a 2 choix pour $r = \pm 1$ et 2^{2p} choix pour les $\gamma_j = \pm 1$, ce qui fait $2^{2p+1} = 2^{n+1}$ choix au total. Heureusement, on a une condition supplémentaire, à savoir (110), ce qui élimine la moitié des cas. En effet, $\Lambda(u)$ est

$$\begin{cases} (2I, 4iI')\text{-périodique} & \text{si } \kappa > 1 \\ (2I + 2iI', 4iI')\text{-périodique} & \text{si } \kappa < 1, \end{cases}$$

et il faut que la proposition 7.5 soit vérifiée. Cela revient à demander

$$\sum_{j=1}^{2p} \left(\phi_j - \gamma_j \frac{iI'}{2} \right) + \sum_{j=1}^{2p} \left(\phi_j - \gamma_j \frac{iI'}{2} + 2iI' \right) = 2piI' \quad (132)$$

$$\begin{aligned} & \pmod{2I, 4iI'} && \text{si } \kappa > 1 \\ & \pmod{2I + 2iI', 4iI'} && \text{si } \kappa < 1. \end{aligned}$$

On calcule en utilisant (124)

$$2 \sum_{j=1}^{2p} \phi_j = \begin{cases} 2I & \text{si } r = -1 \\ 0 & \text{si } r = +1. \end{cases} \quad (133)$$

Pour vérifier (132), il faut donc que

$$\sum_{j=1}^{2p} \gamma_j = \begin{cases} 2p & \pmod{4} & \text{si } \kappa > 1 \text{ ou } r = +1 \\ 2p + 2 & \pmod{4} & \text{si } \kappa < 1 \text{ et } r = -1. \end{cases} \quad (134)$$

On a éliminé la moitié des choix : il ne nous en reste plus que 2^n . Il y a “donc” bijection entre les vecteurs propres x et les choix restants de r et de γ_j . La recherche de la valeur propre maximale $\Lambda_{\max}^2(u)$ est donc équivalente à la recherche des r_{\max} et $\gamma_{j_{\max}}$ correspondants.

Revenons-en à $\Lambda(u)$, dont les zéros et les pôles sont donnés par (131) et par le corollaire 7.12. On observe maintenant que les fonctions

$$\frac{\Lambda(u)}{\Lambda(u + iI')} \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^{2p} \operatorname{sn} \left| u - \left(\phi_j - \frac{iI'}{2} \right) \right|^{\gamma_j} \quad (135)$$

ont mêmes zéros et pôles. Il existe donc par la proposition 7.4 une constante $\tau \neq 0$ telle que

$$\frac{\Lambda(u)}{\Lambda(u + iI')} = \tau \prod_{j=1}^{2p} \left(k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left| u - \left(\phi_j - \frac{iI'}{2} \right) \right| \right)^{\gamma_j}. \quad (136)$$

En multipliant (129) et (136), on obtient

$$\Lambda^2(u) = \tau \left[\operatorname{sh}(2L) \right]^{2p} + \operatorname{sh}(2K) \left[r \right]^{2p} \cdot \prod_{j=1}^{2p} \left(k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left| u - \left(\phi_j - \frac{iI'}{2} \right) \right| \right)^{\gamma_j}. \quad (137)$$

Reste à calculer τ . On se rappelle à cet effet de (111) et de la formule

$$k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u) \cdot k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u + iI') = 1, \quad (138)$$

on obtient

$$r = \frac{\Lambda(u)}{\Lambda(u + 2iI')} = \frac{\Lambda(u)}{\Lambda(u + iI')} \cdot \frac{\Lambda(u + iI')}{\Lambda(u + 2iI')} = \tau^2 \prod_{j=1}^{2p} 1 = \tau^2. \quad (139)$$

A vrai dire, la seule donnée qui nous intéresse vraiment, c'est que τ est de module 1.

On peut maintenant identifier les r_{\max} et $\gamma_{j_{\max}}$ qui nous donneront la valeur de $\Lambda_{\max}(u)$. Premièrement, on se rappelle que K et L sont réels. La matrice de transfert $T(K, L)$ satisfait donc les conditions du théorème de Perron-Frobenius (à savoir, que toutes les composantes sont positives). Le vecteur propre maximal a donc lui aussi ses composantes positives. Par ailleurs, R est une matrice de permutation. On en déduit que

$$R x_{\max} = r_{\max} x_{\max}$$

a ses composantes positives et donc

$$r_{\max} = +1. \quad (140)$$

Pour déterminer les valeurs des $\gamma_{j_{\max}}$, il faut maximiser la norme de (137). En clair, si la norme de $k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u - (\phi_j - \frac{iI'}{2}))$ est plus grande que 1, on aura $\gamma_{j_{\max}} = +1$ et sinon $\gamma_{j_{\max}} = -1$.

Lemme 8.3 *On a l'équivalence*

$$|k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u)| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(u) \in]\frac{I'}{2}, \frac{3I'}{2}[\pmod{2I'}. \quad (141)$$

Démonstration. Par (116), on connaît les sous-ensembles de $\mathbb{C}/4I\mathbb{Z} + 4iI'\mathbb{Z}$ sur lesquels $|k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u)| > 1$ et $|k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u)| < 1$. Puis, on regarde (126) pour savoir lequel est le bon. \square

Vu que $K, L \in \mathbb{R}_+$, le lemme 7.9 nous dit que $u \in]0, iI'[$ et, comme par miracle, on observe que $\operatorname{Im}(u - (\phi_j - \frac{iI'}{2})) \in]\frac{I'}{2}, \frac{3I'}{2}[$. On applique le lemme 8.3 :

$$\left| k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left| u - \left(\phi_j - \frac{iI'}{2} \right) \right| \right| > 1, \quad (142)$$

et on en déduit que

$$\gamma_{j_{\max}} = +1 \quad \forall j = 1 \text{ à } 2p. \quad (143)$$

On vérifie au passage que (134) est bien vérifiée.

Étudions maintenant un peu le terme $k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left| u - \left(\phi_j + i\frac{I'}{2} \right) \right|$. Pour simplifier l'écriture, posons

$$u_j := \phi_j - \frac{iI'}{2}, \quad \theta_j := \begin{cases} \frac{\pi j}{2p} & \text{si } r = -1 \\ \frac{\pi(j-1/2)}{2p} & \text{si } r = +1 \end{cases}, \quad (144)$$

qui vérifient par définition

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u_j) &= \operatorname{sn}\left(\phi_j - \frac{iI'}{2}\right) \\ &= \operatorname{sn}\left(\phi(\theta_j) - \frac{iI'}{2}\right) = -k^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta_j}. \end{aligned} \quad (145)$$

On utilise la formule d'addition de sn :

$$\begin{aligned} k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u - u_j) &= k^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u_j) \operatorname{dn}(u_j) - \operatorname{sn}(u_j) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(u_j)}} \\ &= \frac{k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u_j) \operatorname{dn}(u_j) + e^{i\theta_j} \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k \operatorname{sn}^2(u) e^{2i\theta_j}}. \end{aligned} \quad (146)$$

Maintenant, on traite à part l'un des termes qui apparait dans la formule ci-dessus :

$$\begin{aligned}
k^{\frac{1}{2}} \operatorname{cn}(u_j) \operatorname{dn}(u_j) &= \pm \sqrt{k(1 - \operatorname{sn}^2(u_j))(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u_j))} \\
&= \pm \sqrt{k(1 - e^{2i\theta_j})(1 - ke^{2i\theta_j})} \\
&= \pm e^{i\theta_j} \sqrt{2k \cos(2\theta_j) - (1 + k^2)} \\
&= \pm i e^{i\theta_j} \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(2\theta_j)}.
\end{aligned} \tag{147}$$

On sait que $1 + k^2 - 2k \cos(2\theta_j)$ est toujours positif, il faut encore déterminer le signe de la racine. Pour cela, on se rapelle de $\phi = \phi(\theta)$ donné par

$$\operatorname{sn}(\phi - \frac{iI'}{2}) = -k^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta}. \tag{148}$$

Du coup, on a

$$\begin{aligned}
k^{\frac{1}{2}} \operatorname{cn}(\phi - \frac{iI'}{2}) \operatorname{dn}(\phi - \frac{iI'}{2}) &= k^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\phi} \operatorname{sn}(\phi - \frac{iI'}{2}) \\
&= -\frac{d}{d\phi} e^{i\theta} = -i e^{i\theta} \frac{d\theta}{d\phi}.
\end{aligned} \tag{149}$$

Par ailleurs, on voit par (123) que $\frac{d\theta}{d\phi} > 0$. Le signe de la racine est donc le “-”. Posons

$$\tilde{c}_j := +\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(2\theta_j)}, \tag{150}$$

et continuons à transformer (146) :

$$\begin{aligned}
k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u - u_j) &= \frac{-i \operatorname{sn}(u) \tilde{c}_j e^{i\theta_j} + \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) e^{i\theta_j}}{1 - k \operatorname{sn}^2(u) e^{2i\theta_j}} \\
&= \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) - i \operatorname{sn}(u) \tilde{c}_j}{e^{-i\theta_j} - k \operatorname{sn}^2(u) e^{i\theta_j}} \\
&= \frac{i \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)} + \tilde{c}_j}{\frac{i}{\operatorname{sn}(u)} e^{-i\theta_j} - i k \operatorname{sn}(u) e^{i\theta_j}} \\
&= \begin{cases} \frac{k \operatorname{ch}(2K) \operatorname{ch}(2L) + \tilde{c}_j}{k \operatorname{sh}(2L) e^{-i\theta_j} + k \operatorname{sh}(2K) e^{i\theta_j}} & \text{si } \kappa > 1 \\ \frac{\operatorname{ch}(2K) \operatorname{ch}(2L) + \tilde{c}_j}{\operatorname{sh}(2L) e^{-i\theta_j} + \operatorname{sh}(2K) e^{i\theta_j}} & \text{si } \kappa < 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{151}$$

Maintenant, on pose

$$c_j := +\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos(2\theta_j)}, \tag{152}$$

qui satisfait

$$\begin{aligned} c_j &= k^{-1} \tilde{c}_j & \text{si } \kappa > 1 \\ c_j &= \tilde{c}_j & \text{si } \kappa < 1, \end{aligned} \quad (153)$$

et on obtient

$$k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u - u_j) = \frac{\operatorname{ch}(2K) \operatorname{ch}(2L) + c_j}{\operatorname{sh}(2K)e^{i\theta_j} + \operatorname{sh}(2L)e^{-i\theta_j}}. \quad (154)$$

Rassemblons les résultats obtenus en (137), (140), (143) et (154) :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\max}^2(K, L) \equiv \Lambda_{\max}^2(u) &= \tau \left[|2i \operatorname{sh}(2L)|^{2p} |2i \operatorname{sh}(2K)|^{2p} \right] \\ &\cdot \prod_{j=1}^{2p} \frac{\operatorname{ch}(2K) \operatorname{ch}(2L) + c_j}{\operatorname{sh}(2K)e^{i\theta_j} + \operatorname{sh}(2L)e^{-i\theta_j}}. \end{aligned} \quad (155)$$

On remarque avec satisfaction que le paramètre u a disparu, et de même pour les fonctions elliptiques, mais on peut encore simplifier.

Lemme 8.4 *On a l'égalité de polynômes*

$$(ix)^{2p} + (-iy)^{2p} = \prod_{j=1}^{2p} (e^{-i\theta_j} x + e^{i\theta_j} y), \quad (156)$$

où les θ_j sont donnés par la formule

$$\theta_j = \frac{\pi(j-1/2)}{2p} \quad 1 \leq j \leq 2p.$$

Démonstration. Comme (156) est homogène, on peut se restreindre au cas $y = 1$:

$$(ix)^{2p} + (-i)^{2p} = \prod_{j=1}^{2p} (e^{-i\theta_j} x + e^{i\theta_j}). \quad (157)$$

On vérifie d'abord que les deux polynômes ci-dessus ont même coefficient de x^{2p}

$$\prod_{j=1}^{2p} e^{-i\theta_j} = \exp\left(-i \sum_{j=1}^{2p} \theta_j\right) = e^{-i\pi p} = (-1)^p = (i)^{2p}.$$

il faut encore vérifier que les racines sont les mêmes. Soient x_j les racines du membre de droite de (157)

$$e^{-i\theta_j} x_j + e^{i\theta_j} = 0.$$

On a donc $x_j = -e^{2i\theta_j} = -e^{\frac{i\pi(j-1/2)}{p}}$ et on voit que

$$\begin{aligned} (ix_j)^{2p} + (-i)^{2p} &= (-i)^{2p} e^{2i\pi(j-1/2)} + (-i)^{2p} \\ &= (-i)^{2p} ((-1)^{2j-1} + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maintenant, deux polynômes de même degré, avec mêmes coefficients principaux et mêmes racines sont égaux. \square

Les dénominateurs de (155) se simplifient donc et il nous reste

$$\Lambda_{\max}^2(K, L) = \tau \prod_{j=1}^{2p} 2 \left(\text{ch}(2K) \text{ch}(2L) + c_j \right). \quad (158)$$

Les deux termes sont positifs et τ est de norme 1 donc $\tau = 1$.

Avant de finir nous conseillons au lecteur d'éventuellement relire les énoncés des propositions 3.8 et 4.2. On en avait déduit la formule (39). Maintenant on connaît les valeurs explicites de $\lambda_{\max}(K, L; 2p) = \Lambda_{\max}^2(K, L; p)$ et on calcule

$$\begin{aligned} F(\text{Ising}(K, L)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln |\lambda_{\max}(K, L; n)| \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{4p} \ln |\Lambda_{\max}^2(K, L; p)| \quad \text{car } n = 2p \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{4p} \ln \left[\prod_{j=1}^{2p} 2 \left(\text{ch}(2K) \text{ch}(2L) + c_j \right) \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{4p} \sum_{j=1}^{2p} \ln \left[2 \left(\text{ch}(2K) \text{ch}(2L) + \sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos(2\theta_j)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln \left[2 \left(\text{ch}(2K) \text{ch}(2L) + \sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos(2\theta)} \right) \right] d\theta, \end{aligned} \quad (159)$$

où κ vaut toujours $\text{sh}(2K) \text{sh}(2L)$.

Il faut tout de même un petit argument pour dire que cette formule est aussi valable quand $\kappa = \text{sh}(2K) \text{sh}(2L) = 1$. Cela résulte du fait que les valeurs propres dépendent continument d'une matrice. Vu que la valeur propre maximale est toujours réelle positive (par le théorème de Perron-Frobenius), elle aussi dépend continument de la matrice et on a

$$\text{valeur propre max. de } T(K', L') @ > (K', L') \rightarrow (K, L) > \kappa' \rightarrow 1 > \text{valeur propre max. de } T(K, L).$$

Du coup (158) est aussi valable si $\kappa = 1$ et de même pour (159).

9 Conclusion

La valeur de $F(\text{Ising})$, donnée en (159), a été confirmée par des méthodes numériques et il n'y a aucun doute quand à l'exactitude du résultat. Il convient cependant de dire deux mots sur le statut mathématique à lui donner. Comme on l'a déjà fait remarquer, ce résultat est subordonné à une hypothèse très forte, à savoir, que l'énergie libre $F(\text{Ising})$ soit bien définie selon la définition 3.5. On avait aussi demandé que les systèmes $\Gamma(K, L; n)$ (systèmes introduits au paragraphe 5 qui tendent vers $\text{Ising}(K, L)$) aient leur énergie bien définie. C'est une hypothèse dont on aurait pu se passer à relativement petits frais. Toutefois nous ne l'avons pas fait car elle est dans un sens "négligeable" comparée à la précédente.

Le seul théorème que l'on peut espérer énoncer est donc de la forme "Si $F(\text{Ising})$ est bien définie, sa valeur est...". Or, même ainsi, il y a un trou dans la démonstration.

On avait défini en (78) des fonctions Λ en nombre de 2^n (une pour chaque vecteur propre de certaines matrices $2^n \times 2^n$). Par la suite, on a trouvé en (137) 2^n fonctions, candidats à être les Λ . On en a “dédduit” qu’il y a bijection entre les deux, en omettant de regarder si, par hasard, deux des fonctions Λ ne seraient pas identiquement les mêmes et donc qu’une des fonctions de (137) ne soit pas réalisée.

10 Références

[Bax] R.J. Baxter (1982) *Exactly solved Models in Statistical Mechanics* Academic Press

[Chan] K. Chandrasekaran (1985) *Elliptic Functions* Springer

[Gan] Gantmacher *The Theory of Matrices* Chelsea, New York

Table des matières

1	Introduction	1
2	Graphes à bord	1
3	Systèmes de mécanique statistique sur des gra- phes à bord	3
4	L’énergie libre de systèmes à une dimension	9
5	Le modèle d’Ising	11
6	L’équation de Yang-Baxter	14
7	Fonctions elliptiques	22
8	Les zéros de $\Lambda(u)$	29
9	Conclusion	38
10	Références	39