Etude d'un q-analogue de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}(x)$

A. Henriques

1 L'anneau $\mathbb{Z}(x)$

Dans ce papier, $\mathbb{Z}(x)$ désigne l'anneau des polynômes p à coefficients rationnels qui satisfont $p(x) \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Si on introduit l'opérateur de différence finie Δ par

$$\Delta p(x) := p(x) - p(x-1), \tag{1}$$

on peut alors considérer les éléments de $\mathbb{Z}(x)$ comme des fonctions polynomiales et donc poser

Definition 1

$$\mathbb{Z}(x) := \left\{ p \in \mathrm{Fon}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \middle| \exists n \quad \text{t.q.} \quad \Delta^n p = 0 \right\}. \tag{2}$$

La définition du degré dp d'un polynôme suit naturellement:

$$\mathrm{d}p := \begin{cases} \min\left(n \geq 0 | \, \Delta^{n+1} p = 0\right) & \text{si} \quad p \neq 0 \\ -\infty & \text{si} \quad p = 0, \end{cases} \tag{3}$$

et on a

$$\Delta^n p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \mathrm{d}p + 1. \tag{4}$$

On peut montrer que les polynômes b_k,

$$b_k(x) := \binom{x+k}{k} = \frac{(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k)}{k!}, \qquad k \geq 0 \tag{5}$$

forment une base de $\mathbb{Z}(x)$.
Pour cela, introduisons l'opérateur Δ^{-1}:

$$x\Delta^{-1} p(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{x} p(n) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \\ \displaystyle -\sum_{n=1}^{-x-1} p(-n) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases} \tag{6}$$

qui est un inverse à droite de Δ. On voit facilement que $\Delta b_{k+1} = b_k$ et que $\Delta^{-1} b_k = b_{k+1}$. De manière plus générale, on a la formule

$$\Delta^{-1} \Delta p = p - p(-1). \tag{7}$$

Montrons maintenant que

Proposition 1 *Tout $p \in \mathbb{Z}(x)$ s'écrit de façon unique comme somme finie*

$$p = \sum_{k \geq 0} c_k b_k \qquad \textit{avec} \qquad c_k \in \mathbb{Z} \quad \textit{et} \quad b_k(x) = \binom{x+k}{k}. \tag{8}$$

De plus, on a $c_k = \Delta^k p(-1)$.

Démonstration.
Existence: Si p est constant, alors le résultat est trivial, supposons donc $\mathrm{d}p \geq 1$ et la proposition vérifiée pour tous les p' tels que $\mathrm{d}p' < \mathrm{d}p$. Nous avons par hypothèse de récurrence

$$\Delta p = \sum_{k \geq 0} c'_k b_k \qquad \text{avec} \qquad c'_k = \Delta^k \Delta p(-1) = \Delta^{k+1} p(-1).$$

Il en résulte par (7) que

$$p = \Delta^{-1} \Delta p + p(-1) = p(-1) \cdot b_0 + \sum_{k \geq 1} c'_{k-1} b_k = \sum_{k \geq 0} c_k b_k$$

avec $c_k = \Delta^k p(-1)$.
Unicité: Pour montrer l'unicité, on a le droit de se restreindre au cas $p = 0$. Supposons donc

$$\sum_{k+1}^{n} c_k b_k = 0.$$

Le degré de b_n étant strictement plus grand que celui des b_k, $(k < n)$, si c_n était non nul, on aurait $\mathrm{d}(\sum c_k b_k) = n$, ce qui est absurde. Il ne reste qu'à itérer l'argument pour montrer que tous les c_k sont nuls et donc que l'écriture est unique. □

Posons encore

$$\Delta^{-n} := (\Delta^{-1})^n. \tag{9}$$

On a alors que $\Delta^{-n} p$ est l'unique polynôme satisfaisant

$$\Delta^n \Delta^{-n} p = p \qquad \text{et} \qquad \Delta^{-n} p(x) = 0 \quad \forall\, x,\, -n \leq x \leq -1. \tag{10}$$

Par exemple

$$\Delta^{-n} 1 = \Delta^{-n} b_o = b_n. \tag{11}$$

2 Les coefficients q-binomiaux

Les coefficients binomiaux classiques peuvent être définis par

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si on introduit la q-factorielle

$$n!_q := \prod_{i=1}^{n}(1-q^i), \tag{12}$$

on peut alors définir de manière analogue les coefficients q-binomiaux

$$\binom{n}{k}_q := \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q} \tag{13}$$

qui sont des polynômes palindromes en q, à coefficients entiers. Les q-binomiaux sont des q-analogues des binomiaux classiques, ce qui signifie entre autres, que si on pose $q = 1$, alors on retombe dans le cas classique.
Pour la suite, il convient toutefois d'étendre la définition (13) aux valeurs négatives de n et k. Posons donc

Definition 2

$$\binom{n}{k}_q := \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} \frac{1-q^{n-k+i}}{1-q^i} & \text{si} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14}$$

Il est facile de vérifier les relations de récurrence de base des q-binomiaux

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q \tag{15}$$

et

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q, \tag{16}$$

qui nous montrent que (14) définit bien des polynômes en q et non des fractions rationnelles.
A partir des relations (15) et (16), on obtient rapidement les formules

$$\binom{n+k+1}{k}_q = \sum_{l=0}^{k} q^l \binom{n+l}{l}_q \tag{17}$$

et

$$\binom{n+k+1}{k}_q = \sum_{l=0}^{k} q^{(n+1)l} \binom{n+k-l}{k-l}_q. \tag{18}$$

Montrons maintenant la

Proposition 2 *Si t est une variable formelle, alors on a les formules*

$$\prod_{i=1}^{n}(1+tq^i) = \sum_{k=0}^{n} t^k q^{k(k+1)/2} \binom{n}{k}_q, \quad n \geq 0 \tag{19}$$

et

$$\prod_{i=0}^{n}(1-tq^i)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{n+k}{k}_q, \quad n \geq 0. \tag{20}$$

Démonstration.
Formule (19): Si n est nul, les deux membres valent 1 et la formule est vérifiée. Supposons donc $n \geq 1$ et procédons par récurrence:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1+tq^i) &= (1+tq^n)\prod_{i=1}^{n-1}(1+tq^i) \\
&= (1+tq^n)\sum_{k=0}^{n-1} t^k q^{k(k+1)/2}\binom{n-1}{k}_q \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} t^k \left(q^{k(k+1)/2}\binom{n-1}{k}_q + q^{n+(k-1)k/2}\binom{n-1}{k-1}_q \right) \\
&\quad + t^n q^{n(n+1/2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k q^{k(k+1)/2}\binom{n}{k}_q. \qquad \text{par (16)} \qquad \square
\end{aligned}$$

Formule (20): Comme avant, on procède par récurrence. Si n vaut 0, la formule est facilement vérifiée, supposons donc $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n}(1-tq^i)^{-1} &= (1-tq^n)^{-1}\prod_{i=0}^{n-1}(1-tq^i)^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} t^k q^{nk} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{n+k-1}{k}_q \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left(\sum_{l=0}^{k} q^{nl}\binom{n+k-l-1}{k-l}_q \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{n+k}{k}_q. \qquad \text{par (18)} \qquad \square
\end{aligned}$$

Il est possible de synthétiser (19) et (20) en une seule formule, à savoir

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+tq^i}{1+tq^{n+i}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k q^{k(k+1)/2} \binom{n}{k}_q, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Si $n > 0$, on retrouve (19) tel quel, sinon, il faut remplacer q par q^{-1}, t par $-t$ et n par $-1-n$ dans (20), et observer que

$$\binom{k-n-1}{k}_{q^{-1}} = (-1)^k q^{k(k+1)/2} \binom{n}{k}_q. \tag{22}$$

Montrons encore une des belles propriétés des q-binomiaux:

Proposition 3 *(q-analogue de la formule sommatoire de Chu-Vandermonde)*

$$\binom{n+m}{k}_q = \sum_{l=0}^{k} q^{l(l+m-k)} \binom{n}{l}_q \binom{m}{k-l}_q, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Démonstration. Nous avons, de par la formule (19), que

$$\prod_{i=1}^{n+m} (1+tq^i) = \sum_k t^k q^{k(k+1)/2} \binom{n+m}{k}_q. \tag{24}$$

Décomposons le membre de gauche en

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=0}^{m}(1+tq^i) \cdot \prod_{i=0}^{n}(1+tq^{m+i}) \\
&= \sum_k t^k q^{k(k+1)/2} \binom{m}{k}_q \cdot \sum_k (tq^m)^k q^{k(k+1)/2} \binom{n}{k}_q \\
&= \sum_k \sum_{l=0}^{k} \left(t^{k-l} q^{(k-l)(k-l+1)/2} \binom{m}{k-l}_q \cdot (tq^m)^l q^{l(l+1)/2} \binom{n}{l}_q \right) \\
&= \sum_k t^k q^{k(k+1)/2} \left(\sum_{l=0}^{k} q^{l(l+m-k)} \binom{n}{l}_q \binom{m}{k-l}_q \right).
\end{aligned}$$

Le coefficient de t^k étant égal à celui qui apparait en (24), nous avons donc montré (23). □

3 L'anneau $\mathbb{Z}_q(x)$

Nous avons maintenant tous les outils pour définir l'anneau $\mathbb{Z}_q(x)$, sous anneau de l'anneau des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Les éléments de $\mathbb{Z}_q(x)$ s'appelleront des q-polynômes. Naturellement, on s'arrangera de façon à ce que les fonctions

$$B_k : x \mapsto \binom{x+k}{k}_q, \quad k \geq 0 \tag{25}$$

soient des q-polynômes.
Introduisons d'abord quelques opérateurs sur $\mathrm{Fon}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[q, q^{-1}])$.
L'opérateur de translation T:

$$TP(x) := q^x P(x), \tag{26}$$

dont la k-ème puissance satisfait

$$T^k P(x) = q^{kx} P(x), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Les opérateurs de différence finie Δ_k:

$$\Delta_k P(x) := P(x) - q^k P(x-1), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

Introduisons également la notation P_-:

$$P_-(x) = P(x-1). \tag{29}$$

Tous ces opérateurs sont visiblements $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaires.
Voici encore quelques propriétés simples des opérateurs T et Δ_k:

$$T^k \circ \Delta_l = \Delta_{k+l} \circ T^k \tag{30}$$
$$\Delta_k \circ \Delta_l = \Delta_l \circ \Delta_k \tag{31}$$
$$T^k(P_-) = q^{kb}(T^k P)_- \tag{32}$$
$$\Delta_k P_- = (\Delta_k P)_- \tag{33}$$
$$T^{k+l}(P \cdot Q) = T^k P \cdot T^l Q \tag{34}$$
$$\Delta_{k+l}(P \cdot Q) = \Delta_k P \cdot Q + q^k \Delta_l Q \cdot P_-. \tag{35}$$

Nous pouvons maintenant définir $\mathbb{Z}_q(x)$

Definition 3

$$\mathbb{Z}_q(x) := \left\{ P \in \mathrm{Fon}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \middle| \, \exists k_1, \ldots, k_s \quad \text{t.q.} \quad \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_s} P = 0 \right\} \tag{36}$$

Il est raisonnable d'affirmer que $\mathbb{Z}_q(x)$ est un q-analogue de $\mathbb{Z}(x)$. Pour le voir, introduisons le projecteur

$$\pi : \mathrm{Fon}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \to \mathrm{Fon}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

qui évalue en $q = 1$:

$$\pi(P)(x) := P(x)(1). \tag{37}$$

Par exemple

$$\pi(B_k) = b_k \quad k \geq 0, \tag{38}$$

avec les b_k comme en (5).
Si P est un q-polynôme, alors on a que

$$\pi(\Delta_k P) = \Delta\pi(P) \qquad \text{et} \qquad \pi(T^k P) = \pi(P), \tag{39}$$

ce qui peut se résumer par

$$\pi(\Delta_k) = \Delta \qquad \text{et} \qquad \pi(T^k) = 1. \tag{40}$$

On voit donc que si on pose $q = 1$, la définition (36) se réduit à (2) et donc

$$\pi\big(\mathbb{Z}_q(x)\big) = \mathbb{Z}(x). \tag{41}$$

Les B_k, définis en (25) satisfont par (15) à la relation

$$\Delta_k B_k = B_{k-1}, \tag{42}$$

en répétant (42) on déduit que

$$\Delta_o \dots \Delta_k B_k = 0, \tag{43}$$

et on a bien $B_k \in \mathbb{Z}_q(x)$, $\forall k \geq 0$.

3.1 Le degré d'un q-polynôme

Soit P un q-polynôme. Par définition de $\mathbb{Z}_q(x)$, il existe une suite $(k_i)_{i=1..s}$ tel que

$$\Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_s} P = 0.$$

Comme les opérateurs Δ_k commtuent entre eux, on peut regrouper les k_i identiques et écrire

$$\Delta_{k_1}^{n_1} \dots \Delta_{k_s}^{n_s} P = 0$$

Lemme 1 *Si on a un q-polynôme P satisfaisant*

$$\Delta_{k_1}^{n_1} \dots \Delta_{k_s}^{n_s} P = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{k_1}^{n'_1} \dots \Delta_{k_s}^{n'_s} P = 0, \quad n_i, n'_i \geq 0,$$

alors P satisfait aussi

$$\Delta_{k_1}^{\min(n_1,n'_1)} \dots \Delta_{k_s}^{\min(n_s,n'_s)} P = 0. \tag{44}$$

Démonstration. Posons

$$Q := \Delta_{k_1}^{\min(n_1,n'_1)} \dots \Delta_{k_s}^{\min(n_s,n'_s)} P.$$

Quitte à renumeroter les k_i, on peut supposer que pour $1 \leq i \leq r$ on a $n_i > n'_i$ et pour $r+1 \leq i \leq r+t$ on a $n_i < n'_i$. Si maintenant, on pose $m_i := |n_i - n'_i|$, on obtient

$$\Delta_{k_1}^{m_1} \dots \Delta_{k_r}^{m_r} Q = \Delta_{k_1}^{n_1} \dots \Delta_{k_s}^{n_s} P = 0 \tag{45}$$

et

$$\Delta_{k_{r+1}}^{m_{r+1}} \dots \Delta_{k_{r+t}}^{m_{r+t}} Q = \Delta_{k_1}^{n'_1} \dots \Delta_{k_s}^{n'_s} P = 0. \tag{46}$$

Si t ou $r = 0$, alors $Q = 0$ et il n'y a rien à montrer. Supposons donc $r, t > 0$ et le lemme vérifié pour tous les $r' \leq r$, $t' \leq t$, $(r,t) \neq (r',t')$.
Avant de continuer, introduisons quelques notations: Si C est un élément de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ de la forme

$$C(q) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j q^j,$$

alors on notera

$$c_j(C) := a_j, \tag{47}$$

et

$$m(C) := \min \big(j \big| a_j \neq 0 \big). \tag{48}$$

Pour $C = 0$, on admettra $m(C) = +\infty$.

Sous-lemme 1.1 *Si un q-polynôme P satisfait*

$$\Delta_k^n P = 0,$$

alors il existe un entier b tel que

$$m\big(P(x)\big) \geq kx + b \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{49}$$

Démonstration.
Supposons $P \neq 0$. Par (30), nous avons

$$\Delta_o^n T^{-k} P = T^{-k} \Delta_k^n P = 0. \tag{50}$$

Comme l'opérateur Δ_o agit indépendemment sur les coefficients des différentes puissances de q, on peut scinder (50) en

$$\Delta^n \big(c_j(T^{-k} P) \big) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que les $c_j(T^{-k}P)$ sont des polynômes de degré $< n$. Il ne peut en exister qu'un nombre fini qui sont non nuls, posons donc

$$b := \min\left(j \middle| c_j(T^{-k}P) \neq 0\right).$$

Par définition de b, on a

$$b \leq m\left(T^{-k}P(x)\right), \quad \forall x,$$

et comme

$$m\left(T^{-k}P(x)\right) = m\left(q^{-kx}P(x)\right) = m\left(P(x)\right) - kx,$$

on a montré (49). $\square$

Sous-lemme 1.2 *Si un q-polynôme P satisfait*

$$m\left(P(x)\right) \geq kx + b, \quad \forall x$$

et que l'on se donne $k' > k$, alors

$$m\left(\Delta_{k'}P(x)\right) \geq kx + b \quad et \quad c_{kx+b}\left(\Delta_{k'}P(x)\right) = c_{kx+b}\left(P(x)\right), \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Triviale. $\square$

Revenons à la démonstration de (44). Quitte à échanger (45) et (46), et à renuméroter les k_i, supposons que k_1 est le plus petit des k_i. Nous avons donc par le sous-lemme 1.1 que

$$m\left(\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q(x)\right) \geq k_1 x + b, \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{51}$$

Par commutativité des Δ_k et par (46), nous avons que

$$\Delta_{k_{r+1}}^{m_{r+1}} \ldots \Delta_{k_{r+t}}^{n_{r+t}} \left(\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q\right) = 0.$$

En appliquant le sous-lemme 1.2, on obtient

$$\begin{aligned} &c_{k_1x+b}\left(\Delta_{k_{r+1}}^{m_{r+1}} \ldots \Delta_{k_{r+t}}^{n_{r+t}} \left(\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q(x)\right)\right) \\ =&c_{k_1x+b}\left(\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q(x)\right) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ce résultat, avec (51), nous dit que

$$m\left(\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q(x)\right) \geq k_1 x + b + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{52}$$

En itérant le passage de (51) à (52), on déduit que $m\left(\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q(x)\right)$ est plus grand que tout entier, donc

$$\Delta_{k_2}^{m_2} \ldots \Delta_{k_r}^{m_r} Q = 0. \tag{53}$$

On peut maintenant appliquer la récurrence sur le système (46) et (53), donc $Q = 0$ et on a montré (44). $\square$

Ce lemme nous permet de définir le degré dP d'un q-polynôme, qui est en fait un multi-degré. Introduisons d'abord les notations qui seront utiles par la suite: Posons

$$\hat{\mathcal{D}} := \Big\{ \mathrm{g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \Big\},$$

on notera l'argument de g comme un indice:

$$\mathrm{g} : k \quad \mapsto \quad \mathrm{g}_k.$$

Pour chaque g, définissons son support

$$supp(\mathrm{g}) := \{ k \big| \, \mathrm{g}_k \neq -\infty \}. \tag{54}$$

Le degré dP d'un q-polynôme sera un élément de

$$\mathcal{D} := \Big\{ \mathrm{g} \in \hat{\mathcal{D}} \quad \text{t.q.} \quad supp(\mathrm{g}) \, \text{est fini} \Big\}. \tag{55}$$

Soit $\mathrm{g} \in \mathcal{D}$ avec $supp(\mathrm{g}) = \{k_1, \dots, k_s\}$, on abrègera

$$\Delta_{k_1}^{\mathrm{g}_{k_1}+1} \dots \Delta_{k_s}^{\mathrm{g}_{k_s}+1} \qquad \text{par} \qquad \Delta^{\mathrm{g}}. \tag{56}$$

On peut maintenant poser

Definition 4 *(degré d'un q-polynôme)*

$$\mathrm{d}P := \min\big(\mathrm{g} \in \mathcal{D} \big| \, \Delta^{\mathrm{g}} P = 0 \big). \tag{57}$$

L'existence du minimum nous est garantie par le lemme 1, (57) est donc bien défini.

De plus on a

$$\Delta^{\mathrm{g}} P = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{g} \geq \mathrm{d}P. \tag{58}$$

Posons encore

$$|\mathrm{g}| := \sum_{k \in supp(\mathrm{g})} (\mathrm{g}_k + 1), \tag{59}$$

qui satisfait

$$\pi(\Delta^{\mathrm{g}}) = \Delta^{|\mathrm{g}|}. \tag{60}$$

Si on se donne un q-polynôme P, alors on a

$$\Delta^{|\mathrm{d}P|}\big(\pi(P)\big) = \pi\big(\Delta^{\mathrm{d}P} P\big) = 0, \tag{61}$$

on en déduit par (4) que

$$\mathrm{d}\big(\pi(P)\big) + 1 \leq |\mathrm{d}P|. \tag{62}$$

Avec ces nouvelles notations, on peut reformuler (36) en des termes plus proches de ceux utilisés en (2), à savoir:

$$\mathbb{Z}_q(x) := \Big\{P \in \mathrm{Fon}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \,\Big|\, \exists\, \mathrm{g} \in \mathcal{D} \quad \text{t.q.} \quad \Delta^{\mathrm{g}} P = 0\Big\}. \tag{63}$$

Proposition 4 *Le degré des q-polynômes B_n, définis en (25) satisfait*

$$(\mathrm{d}B_n)_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{64}$$

Démonstration. Posons

$$\mathrm{g}_k := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

On cherche à montrer que $\mathrm{g} = \mathrm{d}B_n$, ce qui signifie que

$$\Delta^{\mathrm{g}} B_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{g}' < \mathrm{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{\mathrm{g}'} B_n \neq 0.$$

On a montré en (43) que

$$\Delta_o \ldots \Delta_n B_n = \Delta^{\mathrm{g}} B_n = 0.$$

Si maintenant on se donne $\mathrm{g}' < \mathrm{g}$, on a aussi

$$|\mathrm{g}'| < |\mathrm{g}| = n + 1,$$

et comme

$$\pi\big(\Delta^{\mathrm{g}'} B_n\big) = \Delta^{|\mathrm{g}'|} \pi(B_n) = \Delta^{|\mathrm{g}'|} b_n \neq 0,$$

on a

$$\Delta^{\mathrm{g}'} B_n \neq 0. \qquad \square$$

3.2 Le degré du produit

Soit P et Q, des q-polynômes. Il est facile de vérifier qu'ils satisfont

$$\mathrm{d}(C \cdot P) = \mathrm{d}P, \quad \forall C \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}],\, C \neq 0, \tag{65}$$

$$\big(\mathrm{d}(T^n P)\big)_k = (\mathrm{d}P)_{k-n}, \tag{66}$$

$$\mathrm{d}(P_-) = \mathrm{d}P \tag{67}$$

et

$$\mathrm{d}(P+Q) \leq \sup\big(\mathrm{d}P, \mathrm{d}Q\big). \tag{68}$$

Come conséquence de (66), on a aussi

$$supp\big(\mathrm{d}(T^n P)\big) = n + supp(\mathrm{d}P). \tag{69}$$

Avant de continuer, introduisons encore quelques notations:
pour $\mathrm{g}, \mathrm{g}' \in \mathcal{D}$, on définit $\mathrm{g} * \mathrm{g}'$ et $\mathrm{g}^{(n)} \in \mathcal{D}$ par

$$(\mathrm{g} * \mathrm{g}')_k := \max_{n \in \mathbb{Z}} \big(\mathrm{g}_n + \mathrm{g}'_{k-n}\big), \tag{70}$$

et

$$\mathrm{g}_k^{(n)} := \begin{cases} \mathrm{g}_k & \text{si} \quad k \neq n \\ \mathrm{g}_k - 1 & \text{si} \quad k = n \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_k \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \quad . \end{cases} \tag{71}$$

On remarque que l'opération $*$ ainsi définie sur $\mathcal{D}$ est commutative et assossiative. Par ailleurs, il est facile de vérifier que

$$supp(\mathrm{g} * \mathrm{g}') = supp(\mathrm{g}) + supp(\mathrm{g}'). \tag{72}$$

Notons également que si $\mathrm{g} = \mathrm{d}P$, alors on a $\mathrm{g}^{(n)} = \mathrm{d}(\Delta_n P)$ et que si $n \in supp(\mathrm{g})$ alors

$$\Delta^{\mathrm{g}} = \Delta^{\mathrm{g}^{(n)}} \circ \Delta_n. \tag{73}$$

Montrons maintenant la

Proposition 5 *Le degré du produit de deux q-polynômes P et Q satisfait*

$$\mathrm{d}(P \cdot Q) \leq \mathrm{d}P * \mathrm{d}Q. \tag{74}$$

Démonstration. Par (58), on a que (74) est équivalent à

$$\Delta^{\mathrm{d}P * \mathrm{d}Q}(P \cdot Q) = 0. \tag{75}$$

Procédons par récurrence pour montrer (75). Si $P = 0$ ou $Q = 0$, (75) est trivialement vérifiée. Supposons donc $P, Q \neq 0$ et (75) vérifié pour tous les P', Q' tels que $\mathrm{d}P' \leq \mathrm{d}P$, $\mathrm{d}Q' \leq \mathrm{d}Q$ et $(\mathrm{d}P', \mathrm{d}Q') \neq (\mathrm{d}P, \mathrm{d}Q)$.
Posons $\mathrm{g} := \mathrm{d}P$, $\mathrm{g}' := \mathrm{d}Q$ et

$$k := \min\big(supp(\mathrm{g})\big), \qquad l := \min\big(supp(\mathrm{g}')\big). \tag{76}$$

Vu que $k+l \in supp(\mathrm{g} * \mathrm{g}')$, on a le droit de décomposer (75) en

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{g}*\mathrm{g}'}(P \cdot Q) &= \Delta^{(\mathrm{g}*\mathrm{g}')^{(k+l)}}\big(\Delta_{k+l}(P \cdot Q)\big) \\ &= \Delta^{(\mathrm{g}*\mathrm{g}')^{(k+l)}}\big(\Delta_k P \cdot Q + q^k \Delta_l Q \cdot P_-\big) \\ &= \Delta^{(\mathrm{g}*\mathrm{g}')^{(k+l)}}\big(\Delta_k P \cdot Q\big) + q^k \Delta^{(\mathrm{g}*\mathrm{g}')^{(k+l)}}\big(\Delta_l Q \cdot P_-\big).\end{aligned}$$

Lemme 2 *Soient* $\mathrm{g}, \mathrm{g}' \in \mathcal{D}$*,* k *et* l *définis comme en (76), alors*

$$(\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)} \geq \mathrm{g}^{(k)} * \mathrm{g}' \quad et \quad (\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)} \geq \mathrm{g} * \mathrm{g}'^{(l)}. \tag{77}$$

Démonstration (première inégalité). Si $n \neq k+l$, alors

$$(\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)}_n = (\mathrm{g} * \mathrm{g}')_n \geq (\mathrm{g}^{(k)} * \mathrm{g}')_n.$$

Supposons donc $n = k+l$. Comme $k = \min(supp(\mathrm{g}))$ et $l = \min(supp(\mathrm{g}'))$, on a que

$$(\mathrm{g} * \mathrm{g}')_n = \mathrm{g}_k + \mathrm{g}'_l.$$

Distinguons les deux cas possibles:
a. Si $(\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)}_n = 0$, c'est que

$$\mathrm{g}_k = \mathrm{g}'_l = 0,$$

et donc

$$(\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)}_n = (\mathrm{g}^{(k)} * \mathrm{g}')_n = -\infty.$$

b. Si $(\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)}_n \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{g} * \mathrm{g}')^{(k+l)}_n &= (\mathrm{g} * \mathrm{g}')_n - 1 = \mathrm{g}_k + \mathrm{g}'_l - 1 \geq \\ &\geq \mathrm{g}^{(k)}_k + \mathrm{g}'_l = (\mathrm{g}(k) * \mathrm{g}')_n.\end{aligned}$$

Nous avons donc montré (77). □

Par hypothèse de récurrence on a que

$$\Delta^{\mathrm{d}(\Delta_k P) * \mathrm{d}Q}\big(\Delta_k P \cdot Q\big) = \Delta^{\mathrm{g}^{(k)} * \mathrm{g}'}\big(\Delta_k P \cdot Q\big) = 0$$

et

$$\Delta^{\mathrm{d}(\Delta_l Q) * \mathrm{d}(P_-)}\big(\Delta_l Q \cdot P_-\big) = \Delta^{\mathrm{g}'^{(l)} * \mathrm{g}}\big(\Delta_l Q \cdot P_-\big) = 0.$$

En appliquant le lemme on obtient

$$\Delta^{(\mathrm{g}*\mathrm{g}')^{(k+l)}}\big(\Delta_k P \cdot Q\big) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta^{(\mathrm{g}*\mathrm{g}')^{(k+l)}}\big(\Delta_l Q \cdot P_-\big) = 0$$

et on a montré (75) donc (74). □

Corollaire 5.1 *L'ensemble $\mathbb{Z}_q(x)$, défini en (36), muni de l'addition et de la multiplication des fonctions est un anneau.*

Démonstration.
La seule vérification à effectuer est de savoir si les deux opérations sont bien internes. Pour cela, la définition équivalente (63) est plus commode. Soient donc P et Q, des q-polynômes. On a par (68) et (74) que

$$\Delta^{\sup(\mathrm{d}P,\mathrm{d}Q)}\big(P+Q\big)=0 \qquad \text{et} \qquad \Delta^{\mathrm{d}P*\mathrm{d}Q}\big(P\cdot Q\big)=0,$$

donc $P+Q$ et $P\cdot Q$ sont également des q-polynômes. $\square$

Par ailleurs, nous pouvons identifier un sous-anneau remarquable, à savoir, l'anneau $\mathbb{Z}_q^o(x)$, des q-polynômes P tels que $\mathrm{d}_k P = 0$ ou $-\infty$, $\quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$.
Si on pose

$$\mathcal{D}_o := \big\{\mathrm{g} \in \mathcal{D} \big|\, \mathrm{g}_k \leq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\big\}, \tag{78}$$

alors on peut écrire

$$\mathbb{Z}_q^o(x) := \Big\{P \in \mathbb{Z}_q(x) \Big|\, \mathrm{d}P \in \mathcal{D}_o\Big\}. \tag{79}$$

C'est bien un sous-anneau car

$$\mathrm{g}, \mathrm{g}' \in \mathcal{D}_o \qquad \Rightarrow \qquad \sup(\mathrm{g}, \mathrm{g}') \in \mathcal{D}_o \quad \text{et} \quad \mathrm{g} * \mathrm{g}' \in \mathcal{D}_o, \tag{80}$$

donc

$$P, Q \in \mathbb{Z}_q^o(x) \qquad \Rightarrow \qquad P+Q \in \mathbb{Z}_q^o(x) \quad \text{et} \quad P\cdot Q \in \mathbb{Z}_q^o(x). \tag{81}$$

Les q-polynômes B_k, définis en (25), appartiennent par exemple à $\mathbb{Z}_q^o(x)$, comme nous l'indique (64), on a bien $\mathrm{d}B_k \in \mathcal{D}_o$.

3.3 Une base pour $\mathbb{Z}_q(x)$

On a vu que la donnée en (6), d'un inverse de l'opération Δ a été utile pour montrer que les b_k forment une base de $\mathbb{Z}(x)$. De manière analogue, on définit

$$\Delta_k^{-1} P(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{x} q^{k(x-n)} P(n) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1\,, \\ \displaystyle -\sum_{n=1}^{-x-1} q^{k(x+n)} P(-n) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases} \tag{82}$$

qui est un inverse à droite de Δ_k, et qui satisfait

$$\Delta_k^{-1}\Delta_k P(x) = P(x) - q^{k(x+1)} P(-1). \tag{83}$$

Essayons maintenant de déterminer quels sont les q-polynômes Q qui satisfont à l'équation $\Delta^{\mathrm{g}} Q = P$.

Lemme 3 *Soit P un q-polynôme, $\mathrm{g} \in \mathcal{D}$ avec $n = |\mathrm{g}|$, $C_1 \ldots C_n \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ et $n_o \in \mathbb{Z}$. Alors il existe un unique q-polynôme Q satisfaisant*

$$\Delta^{\mathrm{g}} Q = P \tag{84}$$

et

$$Q(n_o + i) = C_i \qquad pour \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Démonstration.
On peut écrire Δ^{g} sous la forme

$$\Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_n}.$$

En développant entièrement $\Delta^{\mathrm{g}} Q(x)$, on obtient une expression du style

$$\Delta^{\mathrm{g}} Q(x) = \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_n} Q(x) = \sum_{r=0}^{n} A_r Q(x - r),$$

où les A_r sont des éléments de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ qui dépendent de g. Notons simplement que A_o et A_n sont inversibles dans $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, on peut même les écrire explicitement:

$$A_o = 1 \qquad \text{et} \qquad A_n = (-1)^n q^{k_1 + \ldots + k_n}.$$

On obtient donc un système d'équations pour les valeurs de Q:

$$\sum_{r=0}^{n} A_r Q(x - r) = P(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{Z}. \tag{85}$$

Si maintenant on se donne n valeurs successives de Q (par exemple pour $n_o + 1 \leq x \leq n_o + n$), la valeur qui suit est entièrement déterminée par

$$A_o \cdot Q(n_o + n + 1) = P(n_o + n + 1) - \sum_{r=1}^{n} A_r Q(n_o + n + 1 - r).$$

De même, la valeur de Q qui précède est déterminée par

$$A_n \cdot Q(n_o) = P(n_o + n) - \sum_{r=0}^{n-1} A_r Q(n_o + n - r).$$

En itérant le calcul, on obtient toutes les valeurs de Q pour $x \geq n_o + n + 1$ et $x \leq n_o$. Le q-polynôme Q ainsi définit satisfait (85) par construction, et donc aussi (84). On a démontré l'existence et l'unicité. $\square$

Definition 5 *On notera $\Delta^{-\mathrm{g}}P$, l'unique q-polynôme Q satisfaisant*

$$\Delta^{\mathrm{g}} Q = P$$

et

$$Q(x) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad -|\mathrm{g}| \leq x \leq -1.$$

On peut voir que

$$\pi(\Delta^{-\mathrm{g}}) = \Delta^{-|\mathrm{g}|}. \tag{86}$$

Pour $\mathrm{g}, \mathrm{g}' \in \mathcal{D}$, définissons $\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}' \in \mathcal{D}$ par

$$\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}' := \begin{cases} \mathrm{g}_k + \mathrm{g}'_k + 1 & \text{si} \quad \mathrm{g}_k, \mathrm{g}'_k \geq 0 \\ \mathrm{g}_k & \text{si} \quad \mathrm{g}'_k = -\infty \\ \mathrm{g}'_k & \text{si} \quad \mathrm{g}_k = -\infty, \end{cases} \tag{87}$$

qui satisfait

$$\Delta^{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'} = \Delta^{\mathrm{g}} \circ \Delta^{\mathrm{g}'}. \tag{88}$$

Il est facile de vérifier que

$$|\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'| = |\mathrm{g}| + |\mathrm{g}'| \tag{89}$$

et que

$$\mathit{supp}(\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}') = \mathit{supp}(\mathrm{g}) \cup \mathit{supp}(\mathrm{g}'). \tag{90}$$

Proposition 6 *Soient* $\mathrm{g}, \mathrm{g}' \in \mathcal{D}$, *alors*

$$\Delta^{-(\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}')} = \Delta^{-\mathrm{g}'} \circ \Delta^{-\mathrm{g}}. \tag{91}$$

Démonstration. Soit P un q-polynôme, on pose $Q := \Delta^{-(\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}')}P$, qui satisfait par définition

$$\Delta^{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'} Q = \Delta^{\mathrm{g}} \Delta^{\mathrm{g}'} Q = P \tag{92}$$

et

$$Q(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad -|\mathrm{g}| - |\mathrm{g}'| = -|\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'| \leq x \leq -1. \tag{93}$$

Si on écrit

$$\Delta^{\mathrm{g}'} Q(x) = \sum_{r=0}^{|\mathrm{g}'|} A_r Q(x - r),$$

on voit que (93) implique

$$\Delta^{\mathrm{g}'} Q(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad -|\mathrm{g}| \leq x \leq -1.$$

Ceci, combiné avec (92) nous donne

$$\Delta^{\mathrm{g}'} Q = \Delta^{-\mathrm{g}} P. \tag{94}$$

Maintenant, (94) et (93) entrainent

$$Q = \Delta^{-\mathrm{g}'} \Delta^{-\mathrm{g}} P$$

et on a montré (91). □

Comme corollaire, on a que

$$\Delta^{-\mathrm{g}} \circ \Delta^{-\mathrm{g}'} = \Delta^{-\mathrm{g}'} \circ \Delta^{-\mathrm{g}}. \tag{95}$$

De même, si

$$\Delta^{\mathrm{g}} = \Delta_{k_1}^{n_1} \dots \Delta_{k_s}^{n_s},$$

alors

$$\Delta^{-\mathrm{g}} = \Delta_{k_1}^{-n_1} \dots \Delta_{k_s}^{-n_s}.$$

On a vu que les B_k, tels qu'ils ont été définis en (25) appartiennent tous au sous-anneau $\mathbb{Z}_q^o(x)$. Si maintenant on veut faire une base de $\mathbb{Z}_q(x)$, il faut donc en introduire des nouveaux.

Definition 6 *Pour* $\mathrm{g} \in \mathcal{D}$, B_{g} *est l'unique q-polynôme satisfaisant*

$$\Delta^{\mathrm{g}} B_{\mathrm{g}} = 0 \tag{96}$$

et

$$B_{\mathrm{g}}(0) = 1; \qquad B_{\mathrm{g}}(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad -|\mathrm{g}| + 1 \leq x \leq -1. \tag{97}$$

Si supp$(\mathrm{g}) = \emptyset$, *on admettera* $B_{\mathrm{g}} = 0$.

Notons que

$$\pi(B_{\mathrm{g}}) = b_{|\mathrm{g}|-1} \tag{98}$$

et que

$$\mathrm{d}B_{\mathrm{g}} = \mathrm{g}. \tag{99}$$

Par ailleurs, si $\mathrm{g} = \mathrm{d}B_n$, où B_n est défini comme en (25), alors on retombe sur $B_{\mathrm{g}} = B_n$.

Proposition 7 *Pour* g, $\mathrm{g}' \in \mathcal{D}$, *supp*(g) $\neq \emptyset$, *on a*

$$\Delta^{-\mathrm{g}'} B_{\mathrm{g}} = B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'}. \tag{100}$$

Démonstration. Pour $-|\mathrm{g}'| \leq x \leq -1$, on a bien

$$B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'}(x) = 0,$$

ceci car $-|\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'| + 1 = -|\mathrm{g}| - |\mathrm{g}'| + 1 \leq -|\mathrm{g}'|$.
Reste à voir que

$$\Delta^{\mathrm{g}'} B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'} = B_{\mathrm{g}}.$$

On a bien

$$\Delta^{\mathrm{g}}(\Delta^{\mathrm{g}'} B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'}) = \Delta^{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'} B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'} = 0.$$

Il reste donc à voir que

$$\Delta^{\mathrm{g}'} B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad -|\mathrm{g}| + 1 \leq x \leq -1 \end{cases}.$$

Pour cela, on développe

$$\Delta^{\mathrm{g}'} B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'}(x) = \sum_{r=0}^{|\mathrm{g}'|} A_r B_{\mathrm{g}\hat{+}\mathrm{g}'}(x-r).$$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf quand $x = 0$ et $r = 0$, où l'on obtient 1. Nous avons donc montré (100). □

En particulier, si $k \in$ *supp*(g), (100) nous dit que

$$B_{\mathrm{g}} = \Delta_k^{-1} B_{\mathrm{g}^{(k)}}. \tag{101}$$

Definition 7 *On appellera "suite régulière" dans $\mathcal{D}$, toute suite croissante* $(\mathrm{g}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, *d'éléments de $\mathcal{D}$ satisfaisant*

$$|\mathrm{g}^i| = i \qquad \forall\, i \geq 0 \tag{102}$$

et

$$\forall\, \mathrm{g} \in \mathcal{D} \quad \exists\, i \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{g} \leq \mathrm{g}^i. \tag{103}$$

De même, une suite croissante $(\mathrm{g}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, *d'éléments de $\mathcal{D}_o$, est régulière dans $\mathcal{D}_o$ si elle satisfait (102) et*

$$\forall\, \mathrm{g} \in \mathcal{D}_o \quad \exists\, i \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{g} \leq \mathrm{g}^i. \tag{104}$$

Soit (g^i) une suite régulière (dans $\mathcal{D}$ ou dans $\mathcal{D}_o$). Vu que la suite est croissante et que $|\mathrm{g}^{i-1}| = |\mathrm{g}^i| - 1$, on a

$$\Delta^{\mathrm{g}^i} = \Delta_{k_i} \circ \Delta^{\mathrm{g}^{i-1}}. \tag{105}$$

On détermine ainsi une suite d'entiers $(k_i)_{i\geq 1}$ qui satisfont

$$\Delta^{\mathrm{g}^i} := \Delta_{k_1} \circ \ldots \circ \Delta_{k_i}. \tag{106}$$

Pour (g^i) régulière dans $\mathcal{D}$, chaque entier apparaîtra une infinité de fois dans (k_i); pour (g^i) régulière dans $\mathcal{D}_o$, chaque entier y apparaîtra exactement une fois.
En pratique, la donnée de la suite régulière est équivalente à la donnée de la suite des k_i.

Proposition 8 *Soit (g^i) une suite régulière dans $\mathcal{D}$, alors tout $P \in \mathbb{Z}_q(x)$ s'écrit de façon unique comme somme finie*

$$P = \sum_{i\geq 1} C_i B_{\mathrm{g}^i} \qquad \textit{avec} \qquad C_i \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]. \tag{107}$$

En plus, on a $C_i = q^{k_i} \Delta^{\mathrm{g}^{i-1}} P(-1)$.
De même, si (g^i) est régulière dans $\mathcal{D}_o$, alors on obtient une décomposition unique pour tous les $P \in \mathbb{Z}_q^o(x)$.

Démonstration.
Existence: Supposons d'abord $P \in \mathbb{Z}_q(x)$. Si $P = 0$ le résultat est trivial. Supposons donc $P \neq 0$ et la proposition vérifiée pour tous les P' tels que $\mathrm{d}P' < \mathrm{d}P$ et pour toutes les suites $(\bar{\mathrm{g}}^i)$, régulières dans $\mathcal{D}$. Soit $(\bar{\mathrm{g}}^i)$, la suite régulière définie par

$$\bar{\mathrm{g}}^i := (\mathrm{g}^{i+1})^{(k_1)},$$

et qui satisfait

$$\Delta^{\bar{\mathrm{g}}^i} = \Delta_{k_{i+1}} \circ \Delta^{\bar{\mathrm{g}}^{i-1}}.$$

Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer

$$\Delta_{k_1} P = \sum_{i\geq 1} C_i' B_{\bar{\mathrm{g}}^i},$$

avec les C_i' de la forme

$$C_i' = q^{k_{i+1}} \Delta^{\bar{\mathrm{g}}^{i-1}} \Delta_{k_1} P = q^{k_{i+1}} \Delta^{\mathrm{g}^i} P.$$

On développe maintenant $P(x)$ en utilisant (83):

$$P(x) = \Delta_{k_1}^{-1} \Delta_{k_1} P(x) + q^{k_1(x+1)} P(-1).$$

Autrement dit

$$
\begin{aligned}
P &= \Delta_{k_1}^{-1} \sum_{i\geq 1} C_i' B_{\bar{\mathrm{g}}^i} + q^{k_1} P(-1) B_{\mathrm{g}^1} \\
&= C_1 B_{\mathrm{g}^1} + \Delta_{k_1}^{-1} \sum_{i\geq 2} C_{i-1}' B_{\bar{\mathrm{g}}^{i-1}} \\
&= C_1 B_{\mathrm{g}^1} + \sum_{i\geq 2} C_{i-1}' B_{\mathrm{g}^i} \\
&= \sum_{i\geq 1} C_i B_{\mathrm{g}^i} \qquad \text{avec} \qquad C_i = q^{k_i} \Delta^{\mathrm{g}^{i-1}} P(-1).
\end{aligned}
$$

Soit maintenant $P \in \mathbb{Z}_q^o(x)$ et (g^i) régulière dans $\mathcal{D}_o$. Il existe un i_o, tel que $\mathrm{g}^{i_o} \geq \mathrm{d}P$. Considèrons une suite $(\bar{\mathrm{g}}^i)$ régulière dans $\mathcal{D}$, qui coïncide avec (d^i) pour $i \leq i_o$. Vu que $P \in \mathbb{Z}_q^o(x) \subset \mathbb{Z}_q(x)$, on a

$$
P = \sum C_i B_{\bar{\mathrm{g}}^i},
$$

avec $C_i = q^{k_i} \Delta^{\bar{\mathrm{g}}^{i-1}} P(-1)$.
Or, pour $i > i_o$, $\Delta^{\bar{\mathrm{g}}^{i-1}} P(-1) = 0$, il nous reste donc

$$
P = \sum_{i=1}^{i_o} C_i B_{\bar{\mathrm{g}}^i} = \sum_{i=1}^{i_o} C_i B_{\mathrm{g}^i}.
$$

Unicité:
On a le droit de se restreindre au cas $P = 0$. Admettons que

$$
\sum_{i=1}^{n} C_i B_{\mathrm{g}^i} = 0.
$$

Vu que $\pi(B_{\mathrm{g}^i}) = b_{|\mathrm{g}^i|-1} = b_{i-1}$, on a

$$
\pi\big(\sum C_i B_{\mathrm{g}^i}\big) = \sum \pi(C_i) b_{i-1} = 0.
$$

En appliquant (8), on déduit que $\pi(C_i) = C_i(1) = 0 \ \forall i$, on peut donc extraîre un facteur $(1-q)$ de chacun des C_i et écrire

$$
\sum C_i B_{\mathrm{g}^i} = (1-q) \sum C_i' B_{\mathrm{g}^i} = 0.
$$

La construction ci-dessus pouvant être répétée r fois, on obtient que

$$
(1-q)^r \big| C_i \quad \forall r.
$$

Tous les C_i sont donc nuls, l'écriture est unique. $\square$

4 Notations

p	$p \in \mathbb{Z}(x)$
Δ	$\Delta p(x) = p(x) - p(x-1)$
b_k	$b_k(x) = \binom{x+k}{x}$
$\mathrm{d}p$	$\Delta^n p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \mathrm{d}p + 1$
Δ^{-1}	$\Delta\big(\Delta^{-1} p\big) = p, \qquad \Delta^{-1} p(-1) = 0$
P	$P \in \mathbb{Z}_q(x)$
C	$C \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$
$\binom{n}{k}_q$	$\displaystyle \binom{n}{k}_q = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - q^{n-k+i}}{1 - q^i} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$
B_k	$B_k(x) = \binom{x+k}{x}_q$
T^k	$T^k P(x) = q^{kx} P(x)$
Δ_k	$\Delta_k P(x) = P(x) - q^k P(x-1)$
P_-	$P_-(x) = P(x-1)$
π	$\pi(C) = C(1)$
$\mathcal{D}$	$\{\mathrm{g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup -\infty \mid \mathit{supp}(\mathrm{g}) \text{ est fini}\} \quad \mathrm{g} : k \mapsto \mathrm{g}_k$
$\mathit{supp}(\mathrm{g})$	$\mathit{supp}(\mathrm{g}) = \{k \mid \mathrm{g}_k \neq -\infty\}$
Δ^{g}	$\Delta^{\mathrm{g}} = \Delta_{k_1}^{\mathrm{g}_{k_1}+1} \ldots \Delta_{k_s}^{\mathrm{g}_{k_s}+1}, \quad \text{avec} \quad \mathit{supp}(\mathrm{g}) = \{k_1 \ldots k_s\}$
$\mathrm{d}P$	$\mathrm{d}P \in \mathcal{D}, \qquad \Delta^{\mathrm{g}} P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{g} \geq \mathrm{d}P$
$\lvert\mathrm{g}\rvert$	$\displaystyle \sum_{k \in \mathit{supp}(\mathrm{g})} (\mathrm{g}_k + 1), \qquad \pi(\Delta^{\mathrm{g}}) = \Delta^{\lvert\mathrm{g}\rvert}$
$\mathrm{g} * \mathrm{g}'$	$(\mathrm{g} * \mathrm{g}')_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} (\mathrm{g}_n + \mathrm{g}'_{k-n})$
$\mathrm{g}^{(n)}$	$\Delta^{\mathrm{g}^{(n)}} = \Delta_n \circ \Delta^{\mathrm{g}} \quad \text{pour} \quad n \in \mathit{supp}(\mathrm{g})$
$\mathcal{D}_o$	$\mathcal{D}_o = \{\mathrm{g} \in \mathcal{D} \mid \mathrm{g}_k \leq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$
$\Delta^{-\mathrm{g}}$	$\Delta^{\mathrm{g}}\big(\Delta^{-\mathrm{g}} P\big) = P, \qquad \Delta^{-\mathrm{g}} P(x) = 0 \quad \text{pour} \quad -\lvert\mathrm{g}\rvert \leq x \leq -1$
$\mathrm{g} \hat{+} \mathrm{g}'$	$\Delta^{\mathrm{g} \hat{+} \mathrm{g}'} = \Delta^{\mathrm{g}} \circ \Delta^{\mathrm{g}'}$
B_{g}	$\mathrm{d}B_{\mathrm{g}} = \mathrm{g}, \qquad B_{\mathrm{g}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad -\lvert\mathrm{g}\rvert + 1 \leq x \leq -1 \end{cases}$