Oefententamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Jan 2013.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Laat zien dat de enige groep waarvoor de conjugatie actie van G op zichzelf vrij is, de triviale groep is.

Oplossing: De stabilizator van $e \in G$ is de hele groep G. Als deze stabilizator triviaal is, dan is G triviaal.

Opgave 2 Zij G een groep, en zij $H < G$ een deelgroep.
• Laat zien, door een voorbeeld te geven, dat de rechter nevenklassen van H in G niet gelijk hoeven te zijn aan de linker nevenklassen.
• Laat zien dat, als de rechter en linker nevenklassen wel gelijk aan elkaar zijn, dan H een normale deelgroep van G is.

Oplossing: • Neem $G = S_3$ en $H = \{e, (12)\}$. De rechter nevenklassen zijn H, $\{(13), (132)\}$, en $\{(23), (123)\}$. De linker nevenklassen zijn H, $\{(13), (123)\}$, en $\{(23), (132)\}$. • Lemma: als $g' \in Hg$ dan $Hg' = Hg$. Bewijs: $g' = hg$ voor een zekere $h \in H$. Dus $Hg' = Hhg = Hg$. $\square$ Stel nu dat ieder rechter nevenklas Hg gelijk is aan een linker nevenklas $g'H$. In andere woorden, $\forall g \in G$ $\exists g' \in H$ z.d.d. $Hg = g'H$. Omdat $g' \in Hg$, volgt uit het lemma dat $Hg = Hg'$. Dus, $\forall g \in G$, $Hg = gH$. Met g^{-1} rechts te vermenigvuldigen, krijg je $\forall g \in G$, $H = gHg^{-1}$. $\square$

Opgave 3 Wat is de abelianisatie van de symmetrische groep S_n?

Oplossing: De commutator deelgroep bevat ieder 3-cykel omdat $(i,j,k) = (j,k)(i,j)(j,k)^{-1}(i,j)^{-1}$. De commutator deelgroep beval dus de hele alterneerende groep A_n. Ieder commutator is in A_n omdat $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$ een even aantal oneven permutaties bevat. De commutator deelgroep is dus gelijk aan A_n, en de abelianisatie is $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.

Opgave 4 De symmetrische groep S_5 werkt op de verzameling

$$X := \{(0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), \ldots, (1,1,1,1,1)\}$$

van allen 5-tuples van nullen en enen door de getalletjes te permuteren.
• Hoeveel banen heeft deze actie?
• Wat is de stabilizator van $(0,0,1,1,1) \in X$?
• Wat zijn de vaste punten van deze actie?

Oplossing: De actie heeft zes banen: $\{(0,0,0,0,0)\}$, $\{(0,0,0,0,1), (0,0,0,1,0), \ldots, (1,0,0,0,0)\}$, 5-tuples met twee enen, 5-tuples met drie enen, 5-tuples met vier enen, en uitendelijk $\{(1,1,1,1,1)\}$. De vaste punten zijn de banen die één element bevatten: dat zijn $(0,0,0,0,0)$ en $(1,1,1,1,1)$. De stabilizator van $(0,0,1,1,1)$ is $S_2 \times S_3$.

Opgave 5 Zij G een eindige groep met een actie op een eindige verzameling X. Bewijs dat geconjugeerde groepselementen hetzelfde aantal vaste punten hebben.

Oplossing: Stel $h = kgk^{-1}$. Dan is $x \mapsto y := k(x)$ een bijectie van $\{x \in X : g(x) = x\}$ naar $\{y \in X : h(y) = y\}$. In der daad, als $g(x) = x$, dan is $h(y) = kgk^{-1}(k(x)) = kg(x) = k(x) = y$. De inverse afbeelding is $y \mapsto k^{-1}(y)$.

Opgave 6 Zij p een priem getal, en zij G een eindige groep met orde p^n, $n \geq 1$. Bewijs dat G een niet triviaal centrum heeft.

Oplossing: Door de orbit-stabilizer stelling, heeft ieder conjugatie klas een aantal elementen die een macht van p is. In het bijzonder is de cardinaliteit van en conjugatie klasse of 1, of deelbaar door p. $\{e\}$ is een conjugatie klasse, en de som van de cardinaliteiten van alle conjugatie klassen is deelbaar door p. Er zijn dus tenminste p conjugatie klassen die cardinaliteit 1 hebben. Het centrum is de vereniging van alle conjugatie klassen die cardinaliteit 1 hebben, en is dus niet trivial: die heeft tenminste p elementen.

Opgave 7 True/False:
• De 3-Sylows van S_9 zijn abels.
• $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ is cyklisch.
• $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ voor een zekere actie van $\mathbb{Z}_2$ op $\mathbb{Z}_3$.

Oplossing: (F): Een 3-Sylows van S_9 voordt gegeven door $\langle (1,2,3), (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \rangle$, en deze elementen commuteren niet met elkaar. (F): In $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) = \mathbb{Z}_{12}^\times = \{1,5,7,11\}$, hebben alle niet triviale elementen orde 2, en dus $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (T): $(a,b) \mapsto (1,2,3)^a(1,2)^b$ is een isomorfisme van $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ naar S_3.